

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

# ELEMENTI DI ELETTRONICA

Dispense per il Corso di  
LABORATORIO DI ELETTRONICA

Prof. Giuliano F. BOELLA



## PREMESSA

Queste dispense ad uso degli studenti presentano in forma condensata gli elementi base della teoria delle reti elettroniche, della componentistica a semiconduttori e degli amplificatori a controreazione per le esigenze del corso di Laboratorio di Elettronica al III anno del corso di Laurea in Fisica.

La materia é divisa in tre parti.

La prima parte comprende i capitoli da 0 a 4 e presenta la teoria delle reti ideali. In questa parte vengono dati gli strumenti analitici per lo studio dei circuiti elettronici. Nel capitolo 0, oltre a considerazioni generali, viene introdotta la trasformata di Laplace. Nel capitolo 1 vengono introdotti i componenti ideali e le equazioni che consentono di risolvere le reti. Nel capitolo 2 vengono introdotti i teoremi base delle reti. Nel capitolo 3 sono presentati alcuni esempi di calcolo di semplici circuiti. Nel capitolo 4 viene presentata la funzione di trasferimento, strumento chiave per l'analisi del comportamento di una rete.

La seconda parte comprende i capitoli 5, 6 e 7, nei quali vengono presentati rispettivamente i diodi, i transistor bipolari e i transistor a effetto di campo, con i circuiti equivalenti in termini di componenti ideali, e gli amplificatori elementari a transistori.

La terza parte comprende i capitoli 8 e 9. In essa vengono dati i principi e le regole d'uso degli amplificatori attraverso l'uso della controreazione.

Conclude un'appendice, dedicata a introdurre alcune direttive per passare dalla teoria alla pratica di laboratorio.

Giuliano F. Boella  
20 giugno 2005



# Indice

<b>I</b>	<b>Teoria delle reti</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	<b>Concetti introduttivi e strumenti matematici</b>	<b>3</b>
0.1	Sistemi reali e modelli ideali . . . . .	3
0.2	Introduzione all'uso della trasformata di Laplace . . . . .	5
0.2.1	Definizioni . . . . .	5
0.2.2	Esempi d'uso della trasformazione di Laplace . . . . .	5
0.2.3	Metodi di antitrasformazione . . . . .	9
<b>1</b>	<b>Teoria delle reti elettriche ideali: elementi introduttivi</b>	<b>13</b>
1.1	Terminologia di base . . . . .	13
1.2	I componenti attivi ideali indipendenti . . . . .	14
1.2.1	Il generatore ideale indipendente di tensione . . . . .	14
1.2.2	Il generatore ideale indipendente di corrente . . . . .	14
1.3	I generatori ideali dipendenti o comandati . . . . .	15
1.3.1	Il generatore ideale dipendente di tensione comandato di tensione . . . . .	15
1.3.2	Il generatore ideale dipendente di tensione comandato di corrente . . . . .	16
1.3.3	Il generatore ideale dipendente di corrente comandato di tensione . . . . .	16
1.3.4	Il generatore ideale dipendente di corrente comandato di corrente . . . . .	17
1.4	I componenti passivi ideali . . . . .	17
1.4.1	Il resistore . . . . .	17
1.4.2	Il condensatore . . . . .	18
1.4.3	L'induttore . . . . .	19
1.4.4	Considerazioni conclusive sui componenti passivi ideali . . . . .	20
1.5	Interconnessione di componenti ideali: le reti ideali . . . . .	21
1.5.1	Equazioni ai nodi . . . . .	22
1.5.2	Equazioni alle maglie . . . . .	22
1.6	Esempio di calcolo di una semplice rete . . . . .	23
1.6.1	Uso delle equazioni ai nodi . . . . .	23
1.6.2	Uso delle equazioni alle maglie . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Teoria delle reti elettriche ideali: teoremi delle reti</b>	<b>25</b>
2.1	Teorema della sovrapposizione . . . . .	25
2.1.1	Esempio . . . . .	26
2.2	Teorema di Thevenin . . . . .	26
2.2.1	Esempio . . . . .	28
2.3	Teorema di Norton. Sorgenti lineari. . . . .	29
2.3.1	Esempio . . . . .	30

<b>3</b>	<b>Calcolo di alcuni semplici circuiti</b>	<b>31</b>
3.1	Circuito con un generatore dipendente . . . . .	31
3.2	Rilassamento di un circuito RC . . . . .	33
3.2.1	Inserimento della condizione iniziale nell'equazione . . . . .	33
3.2.2	Inserimento della condizione iniziale con la funzione impulsiva . . . . .	34
3.3	Rilassamento di un circuito RL . . . . .	35
3.3.1	Inserimento della condizione iniziale nell'equazione . . . . .	35
3.3.2	Inserimento della condizione iniziale con la funzione impulsiva . . . . .	35
3.4	Rilassamento di un circuito LC . . . . .	36
3.5	Rilassamento di un circuito RLC . . . . .	37
3.6	Risposta di un circuito RC ad eccitazione sinusoidale . . . . .	39
3.7	Risposta di un circuito RL ad un impulso . . . . .	41
3.8	Risposta di un circuito RC ad un impulso . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Funzione di trasferimento</b>	<b>47</b>
4.1	Rappresentazione di $F(s)$ con poli e zeri . . . . .	48
4.2	Analisi della risposta in frequenza . . . . .	50
4.3	Rappresentazione con i diagrammi di Bode . . . . .	51
4.3.1	Contributo di uno zero reale alla risposta in frequenza di $F(j\omega)$ . . . . .	52
4.3.2	Contributo di un polo reale alla risposta in frequenza di $F(j\omega)$ . . . . .	53
4.3.3	Contributo di una coppia di poli complessi coniugati . . . . .	54
4.4	Note conclusive . . . . .	55
4.5	Effetto del caricamento . . . . .	56
4.6	Rete RC passa-basso . . . . .	57
4.7	Rete RC passa-alto . . . . .	59
4.8	Rete RC-CR . . . . .	60
<b>II</b>	<b>I componenti a semiconduttore</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Il diodo</b>	<b>65</b>
5.1	Cristalli semiconduttori . . . . .	65
5.2	La giunzione $pn$ . . . . .	67
5.3	Il diodo a semiconduttori . . . . .	69
5.4	Utilizzo pratico dei diodi . . . . .	70
5.4.1	Raddrizzamento della tensione alternata . . . . .	70
5.4.2	Vincolo bilaterale . . . . .	71
5.5	Diodi a valanga e diodi Zener . . . . .	71
5.6	Le giunzioni $pn$ come rivelatori di radiazione (cenni) . . . . .	72
5.7	I diodi nei circuiti logici . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Il transistor bipolare (BJT)</b>	<b>75</b>
6.1	Il transistor come amplificatore . . . . .	76
6.2	Curve caratteristiche di un transistor . . . . .	77
6.3	Retta di carico e punto di lavoro del transistor . . . . .	79
6.4	Linearità per piccoli segnali . . . . .	80
6.5	Modelli matematici del transistor . . . . .	80
6.6	Circuito equivalente per piccoli segnali . . . . .	81
6.7	Le tre configurazioni di utilizzo del transistor . . . . .	82
6.7.1	Configurazione a base comune CB . . . . .	82

6.7.2	Configurazione a collettore comune CC	85
6.7.3	Configurazione a emettitore comune CE	88
6.8	Raffronto fra le tre configurazioni	90
6.9	Transistor collegati in coppia	91
6.10	Considerazioni aggiuntive	93
<b>7</b>	<b>Il transistor a effetto di campo (FET)</b>	<b>97</b>
7.1	Il FET a giunzione (o JFET)	97
7.2	Curve caratteristiche del FET	98
7.3	Circuito equivalente del FET	98
7.4	Le tre configurazioni di utilizzo del FET	99
7.5	Paragone fra transistor BJT e FET	100
7.6	Cenno ai transistor IGFET	100
<b>III</b>	<b>La controreazione negli amplificatori</b>	<b>103</b>
<b>8</b>	<b>La controreazione o feedback</b>	<b>105</b>
8.1	Amplificatore a controreazione negativa	105
8.1.1	Guadagno	106
8.1.2	Effetto della controreazione negativa su segnali estranei	107
8.1.3	Effetto sulla distorsione	108
8.2	Le 4 topologie della controreazione negativa	109
8.2.1	Confronto a maglia - campionamento a maglia	112
8.2.2	Confronto a maglia - campionamento a nodo	114
8.2.3	Confronto a nodo - campionamento a maglia	116
8.2.4	Confronto a nodo - campionamento a nodo	118
8.3	Raffronto fra le quattro configurazioni	120
8.4	Controreazione negativa e controreazione positiva	122
8.4.1	Discriminatori d'ampiezza	124
<b>9</b>	<b>L'amplificatore operazionale</b>	<b>127</b>
9.1	Schema grafico alternativo dell'amplificatore nodo-nodo	129
9.2	Applicazioni dell'amplificatore nodo-nodo	130
9.2.1	Moltiplicatore per una costante - Invertitore	130
9.2.2	Combinatore lineare	130
9.2.3	Integratore	131
9.2.4	Derivatore	132
9.2.5	Integrazione di un'equazione differenziale	132
9.3	L'amplificatore operazionale	133
9.4	Il blocco Op-Amp	134
9.5	Risposta di un Op-Amp	138
9.5.1	Bipoli esterni puramente resistivi	139
9.5.2	Bipoli esterni misti con resistenze e capacità	142
9.5.3	Reti selettive.	145
9.5.4	Alcune funzioni speciali	148
<b>10</b>	<b>Il comparatore di tensione</b>	<b>151</b>
10.1	Il comparatore integrato e il blocco Op-Amp.	152
10.2	La controreazione positiva nei comparatori	152
10.3	Isteresi	153

<b>IV</b>	<b>Appendice</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Dalla teoria alla pratica di laboratorio</b>	<b>157</b>
A.1	I componenti reali . . . . .	157
A.2	I componenti da dimensionare . . . . .	159
A.3	Le condizioni di lavoro degli amplificatori . . . . .	160



**Parte I**

**Teoria delle reti**



## Capitolo 0

# Concetti introduttivi e strumenti matematici

### 0.1 Sistemi reali e modelli ideali

I componenti elettronici reali, cioè i dispositivi a semiconduttore, le batterie, i resistori, gli induttori, i condensatori, ecc., non sono componenti standard. Ad esempio, due transistori dello stesso modello (2N2222A) possono presentare un guadagno di corrente individuale variabile fra il 50% e il 150% del valor medio del guadagno per quel modello. Spesso non é possibile confrontare il comportamento di due componenti della stessa famiglia, scalati per un diverso valore della loro caratteristica principale, in quanto in genere le caratteristiche collaterali non scalano con lo stesso fattore della caratteristica principale. Inoltre, anche la caratteristica principale del dispositivo può dipendere da altri parametri, uno per tutti la temperatura. Un modello matematico che tenga conto di tutte le caratteristiche particolari di ogni dispositivo diventa non pratico per lo studio del comportamento di un sistema complesso costruito con tali dispositivi. Se invece si possono isolare le caratteristiche principali di ogni classe di dispositivi e postularle costanti oppure variabili con la stessa legge, il modello del sistema complessivo diviene trattabile analiticamente. Soprattutto lo studio può essere concentrato sulle sole caratteristiche essenziali. Anche in Elettromagnetismo (Fisica) si tende a dare una rappresentazione idealizzata di resistori, condensatori, induttori, mettendo in evidenza la caratteristica fondamentale del componente in condizioni idealizzate per giungere alla legge fondamentale che ne governa il comportamento dominante. Sorge allora la necessità di scegliere un numero limitato di *componenti elettronici ideali*, in genere caratterizzati da un solo parametro, o da pochi parametri costanti, ciascuno descritto da una relazione matematica precisa. Di ogni componente elettronico reale può essere dato un modello equivalente in termini dei componenti ideali. Con questo metodo é possibile comporre complessi *modelli ideali di sistemi elettronici*, analizzabili per via analitica, che descrivono il comportamento dominante di sistemi reali entro ben determinati intervalli operativi, in cui é valida l'idealizzazione dei componenti. Ma c'è di più. Con lo studio analitico é possibile comprendere a fondo le modalità di funzionamento di un circuito e perciò capire come ottimizzarne le condizioni operative per avere il miglior funzionamento. Quindi, sulla base delle indicazioni che vengono dallo studio di modelli ideali si vanno a realizzare sistemi reali, costruiti con componenti fisici reali, in grado di emulare il comportamento dei modelli ideali con il grado voluto di approssimazione entro determinati intervalli operativi.

Il modello ideale deve essere un *modello lineare* in modo da poter utilizzare le tecniche matematiche che conosciamo bene e che sono lineari. Quindi il modello ideale é applicabile solo nel caso in cui il comportamento del sistema fisico sia lineare. I sistemi fisici, o reali, non sono in genere lineari. Se però si studia il comportamento di un sistema fisico (ad es. di un pendolo) per piccole variazioni attorno al punto di equilibrio, si nota che esso é ragionevolmente lineare. Nel caso dei sistemi elettronici reali, il

comportamento di un transistor per piccole variazioni delle correnti attorno al punto di lavoro é considerato lineare. Si usa dire che il sistema é lineare per piccoli segnali attorno al punto di lavoro. Nel caso di grandi segnali il comportamento dei sistemi elettronici reali non può essere considerato lineare; per questo caso dovranno essere sviluppate particolari tecniche, che consentano di ottenere sistemi il cui comportamento reale approssimi al meglio il comportamento lineare.

Un sistema fisico (elettrico, meccanico, ecc.) é lineare se per esso vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*. Se ad un'eccitazione  $e_1(t)$  il sistema dá una risposta  $u_1(t)$  e ad un'eccitazione  $e_2(t)$  dá una risposta  $u_2(t)$ , in caso di linearità ad un'eccitazione  $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$  il sistema deve rispondere con una risposta  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . Una rete elettrica in cui alcuni componenti cambiano valore al variare della tensione o della corrente applicata non é una rete lineare e per essa non vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

Un sistema fisico é a *parametri costanti* o *invariante nel tempo* se i parametri che lo caratterizzano (ad es. resistenze, induttanze, capacità, ecc.) non variano nel tempo. Ciò può valere quando le condizioni ambientali non cambiano apprezzabilmente. In realtà tutti i componenti sono sensibili alle variazioni di temperatura: quindi il sistema reale é a parametri variabili.

Un sistema fisico é a *costanti concentrate* se si possono considerare trascurabili i tempi di propagazione dei segnali attraverso di esso, cioè quando le sue dimensioni non intervengono nel calcolo della risposta all'eccitazione. Nei circuiti elettronici ciò é vero quando le dimensioni del circuito sono piccole rispetto alla più piccola lunghezza d'onda che fa parte dei segnali elettrici. In questo caso il comportamento del circuito é considerato isocrono e si considera irrilevante la sua perdita d'energia per irraggiamento elettromagnetico.

Un sistema fisico non é mai perfettamente lineare, non é mai rigorosamente a parametri costanti, non può mai essere realmente considerato a costanti concentrate. Ciò non ostante, *in molti casi pratici si può assumere che le condizioni suddette siano soddisfatte con sufficiente approssimazione*: questa assunzione consente di usare i concetti introdotti e di utilizzare la teoria ideale che andremo a studiare per costruire il modello ideale del sistema fisico (nel nostro caso, del circuito elettronico).

Un sistema a costanti concentrate é descritto da un insieme di equazioni differenziali alle derivate ordinarie (se fosse a costanti distribuite le equazioni sarebbero alle derivate parziali). Se il sistema é anche lineare le equazioni differenziali sono lineari; le equazioni sono allora del tipo:

$$a_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 \cdot f(t) = e(t).$$

Se il sistema é anche a parametri costanti i coefficienti  $a_k$  che compaiono nell'equazione devono essere indipendenti dal tempo.

Per la risoluzione di problemi relativi a sistemi lineari, a parametri invarianti nel tempo, a costanti concentrate, cioè relativi ai nostri modelli ideali, ci si avvale del metodo detto della *trasformata di Laplace*. Esso riconduce un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie nel dominio del tempo ad un sistema di equazioni algebriche lineari nel dominio di una variabile ausiliaria complessa.

[Nota - Il metodo può essere applicato ad un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali, consentendo così lo studio di sistemi a costanti distribuite. Il metodo può essere applicato anche a equazioni differenziali a coefficienti non costanti, cioè al caso di sistemi a parametri variabili nel tempo: ovviamente in questi casi l'applicazione del metodo diviene alquanto pesante.]

Il sistema di equazioni algebriche lineari nel dominio della variabile complessa é trattato nella teoria delle *funzioni analitiche*. Pertanto la teoria delle funzioni analitiche ci rende disponibili tutti gli strumenti matematici necessari per lo studio dei sistemi lineari, a parametri costanti e a costanti concentrate, cioè per lo studio dei modelli ideali che sono il risultato dell'applicazione della teoria ideale dei circuiti elettronici.

## 0.2 Introduzione all'uso della trasformata di Laplace

### 0.2.1 Definizioni

Data una funzione  $f(t)$  definita nel dominio del tempo per  $t \geq 0$  e identicamente nulla per  $t < 0$ , possiamo definire *funzione trasformata unilatera di Laplace* della  $f(t)$  una funzione  $F(s)$  definita nel dominio della variabile complessa  $s = \alpha + j\omega$  ( $j$  è l'unità immaginaria:  $j = \sqrt{-1}$ ), tale che:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = L[f(t)].$$

L'integrale è esteso ad un intervallo infinito ed è perciò un integrale improprio. Se esso converge per un'ascissa  $\alpha_c$ , convergerà per ogni  $s$  con parte reale  $\alpha > \alpha_c$ ; il minimo dell'insieme degli  $\alpha_c$ ,  $\alpha_0$ , è detto ascissa di convergenza. Nel semipiano di convergenza viene stabilita una corrispondenza univoca fra  $f(t)$  e  $F(s)$ . La  $F(s)$ , trasformata di  $f(t)$ , risulta olomorfa nel semipiano di convergenza, cioè è derivabile in senso complesso nel semipiano di convergenza.

E' possibile definire l'operazione inversa della trasformazione di Laplace: l'*antitrasformata*. Tale operazione, indicata col simbolo  $L^{-1}$ , permette di passare dalla funzione  $F(s)$  alla corrispondente funzione  $f(t)$  definita nel dominio del tempo. Si può dimostrare che:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = L^{-1}[F(s)].$$

Il cammino d'integrazione è costituito dalla retta nel piano complesso parallela all'asse immaginario e di ascissa  $b$ , con  $b > \alpha_0$ ;  $f(t)$  non dipende da  $b$ .

Le due formule stabiliscono una relazione biunivoca fra una funzione  $f(t)$ , definita nel dominio del tempo per  $t > 0$  e identicamente nulla per  $t < 0$ , e la sua trasformata  $F(s)$ , definita nel dominio della variabile complessa  $s$  per  $\alpha > \alpha_0$ . Si noti che la variabile complessa  $s$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo: essa viene anche chiamata *frequenza complessa*.

Nota - La trasformazione di Laplace muta le funzioni della variabile reale  $t$ , trasformabili, in funzioni analitiche della variabile complessa  $s$ . Chi ha conoscenza delle funzioni analitiche sa quanto esse siano più regolari e quindi più facilmente dominabili in confronto alla funzioni della variabile reale. Si intuisce quindi l'importanza della trasformazione di Laplace. Qui ci siamo limitati a presentare le definizioni basilari relative a trasformata ed antitrasformata di Laplace. Per gli scopi del presente corso questo ci basta: negli esempi applicheremo rigorosamente le definizioni.

### 0.2.2 Esempi d'uso della trasformazione di Laplace

#### Linearità della trasformata di Laplace

Premettiamo le seguenti due semplici ed ovvie proprietà della trasformazione di Laplace.

1)- La trasformata della somma di due funzioni  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  è uguale alla somma delle trasformate:

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)].$$

2)- La trasformata del prodotto di una costante  $c$  per una funzione  $f(t)$  è uguale al prodotto della costante per la trasformata della funzione:

$$L[c \cdot f(t)] = c \cdot L[f(t)].$$

Queste proprietà sono immediate conseguenze delle analoghe proprietà dell'integrale e della definizione di trasformata. Ogni operazione che gode di queste due proprietà è detta operazione lineare. Quindi la trasformazione di Laplace è un'operazione lineare. Si dice allora che l'integrale, che abbiamo dato nella definizione e che opera sulla funzione  $f(t)$ , è un operatore lineare.

### La funzione gradino unitario

Introduciamo una particolare funzione: la funzione gradino unitario, così definita:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Una generica funzione  $f(t)$ , definita su tutto l'asse dei tempi, diventa una funzione impulsiva  $f_u(t)$  identicamente nulla per  $t < 0$  quando viene moltiplicata per il gradino unitario.

Calcoliamo la trasformata di Laplace di  $u(t)$ :

$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} d(st) = \frac{1}{s}$$

se la parte reale di  $s$  è maggiore di zero:  $Re(s) > 0$ .

La funzione  $u(t)$  può essere usata per introdurre una condizione iniziale. Si immagini di voler rappresentare analiticamente l'applicazione di una forza elettromotrice costante  $E_0$  all'istante  $t = 0$ . Si può scrivere:

$$E(t) = E_0 \cdot u(t)$$

dove  $E(t)$  è una funzione del tempo. La trasformata di  $E(t)$  è:

$$L[E(t)] = E_0 \cdot L[u(t)] = \frac{E_0}{s}$$

### Funzione rampa lineare

Sia  $f(t) = t$  la funzione rampa lineare. Calcoliamone la trasformata.

$$L[f(t)] = L[t] = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \quad (Re(s) > 0)$$

### Funzione esponenziale decrescente

Si abbia la funzione esponenziale decrescente  $f(t) = e^{-at}$ . Calcoliamone la trasformata.

$$L[f(t)] = L[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad (Re(s+a) > 0)$$

### Funzioni sinusoidali

Si abbiano le funzioni sinusoidali  $\sin \omega t$  e  $\cos \omega t$ .

Usando le forme esponenziali

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

e ricordando che per  $Re(s) > 0$ :

$$L[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega} \quad L[e^{-j\omega t}] = \frac{1}{s + j\omega}$$

si ottiene:

$$L[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

entrambe sotto la condizione  $Re(s) > 0$ .

**Proprietá**

Aggiungiamo un'altra semplice e importante proprietá della trasformata di Laplace.

Se  $F(s)$  é la trasformata della funzione  $f(t)$ , allora  $F(s+k)$  é la trasformata della funzione  $e^{-kt} \cdot f(t)$ .

Infatti:

$$L[e^{-kt}f(t)] = \int_0^\infty e^{-kt}f(t) \cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(s+k)t}dt = F(s+k)$$

sotto la condizione  $Re(s) > 0$ .

La trasformata di  $e^{-at}$  é già un caso particolare della presente proprietá quando  $f(t) = 1$ .

Altri esempi di applicazione della presente proprietá sono:

$$L[e^{-at} \cdot \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at} \cdot \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

entrambe sotto la condizione  $Re(s) > 0$ .

**Trasformata dell'integrale**

Calcoliamo la trasformata dell'integrale  $f(t)$  di una funzione continua  $g(t)$ :

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 g(\tau) d\tau + \int_0^t g(\tau) d\tau = g_0 + \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Risulta:

$$L \left[ \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \right] = L[g_0] + L \left[ \int_0^t g(\tau) d\tau \right]$$

Sviluppiamo il calcolo:

$$L[g_0] = \frac{g_0}{s}$$

$$L \left[ \int_0^t g(\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty \left( \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \left( \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \cdot d \left( \frac{e^{-st}}{-s} \right)$$

e integrando per parti

$$= \left[ \left( \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} \cdot g(t) dt$$

e riordinando (il termine in parentesi quadre é nullo)

$$= \frac{1}{s} \cdot \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{G(s)}{s}$$

La trasformata dell'integrale della funzione continua risulta:

$$L \left[ \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \right] = \frac{g_0}{s} + \frac{G(s)}{s}$$

### Trasformata della derivata

Calcoliamo la trasformata della derivata di una funzione continua  $g(t)$

$$f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

Sviluppando il calcolo si ottiene:

$$L\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{dg(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dg(t)$$

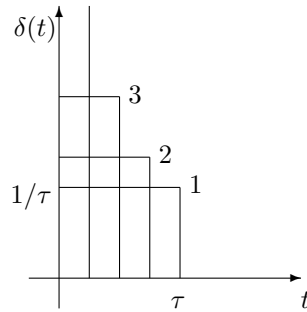
da cui integrando per parti

$$\begin{aligned} &= [e^{-st}g(t)]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-st}g(t)dt \\ &= -g(0^+) + s \cdot \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-st}dt = s \cdot G(s) - g(0^+) \end{aligned}$$

Il calcolo può facilmente essere esteso alle derivate di ordine superiore al primo.

### La funzione delta di Dirac

Introduciamo una funzione particolarmente interessante: la funzione impulsiva  $\delta(t)$ , detta delta di Dirac. La funzione  $\delta(t)$  di Dirac é descritta dalla teoria delle distribuzioni. Qui per semplicitá la definiamo attraverso una semplice operazione di limite. Con riferimento alla figura che segue, partiamo dal primo rettangolo di durata  $\tau$  e altezza  $\frac{1}{\tau}$ , quindi di area unitaria, contrassegnato dal numero 1.



Si faccia progressivamente tendere  $\tau$  a zero, mantenendo l'area normalizzata, cioè sempre uguale a 1, come per i casi contrassegnati con 2,3. La configurazione limite del rettangolo per  $\tau \rightarrow 0$  rappresenta la funzione impropria  $\delta(t)$  di Dirac. Essa é ovviamente nulla ovunque, tranne che per  $t = 0$ , dove va considerata come tendente all'infinito.

Se  $I$  é un qualunque intervallo dell'asse dei tempi che contiene l'intervallo  $0 \leftrightarrow \tau$ , allora

$$\int_I \delta_\tau(t) dt = 1$$

ovvero

$$\int_0^\infty \delta_\tau(t) dt = 1$$



Questa approssimazione é possibile e vantaggiosa nella risoluzione di problemi fisici. La trasformata della  $\delta(t)$  di Dirac é:

$$L[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t) \cdot e^{-st} dt = [e^{-st}]_{t=0} = 1$$

La funzione  $\delta(t)$  di Dirac riveste un ruolo molto importante per introdurre condizioni iniziali nei problemi di fisica o di elettronica.

### Funzioni ritardate

La funzione  $u(t - t_0)$  é la funzione  $u(t)$  ritardata. Infatti:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_0 \\ 1 & \text{per } t \geq t_0 \end{cases}$$

Analogamente, la  $\delta(t - t_0)$  é la funzione  $\delta(t)$  ritardata:

$$\int_I \delta(t - t_0) dt = 1$$

se l'intervallo  $I$  contiene  $t_0$ .

Calcoliamo la trasformata di una generica funzione ritardata.

Sia  $L[f(t)] = F(s)$ . Scriviamo la funzione ritardata nel modo seguente:

$$f(t - t_0) = u(t - t_0) \cdot g(t - t_0)$$

Allora é:

$$L[f(t - t_0)] = \int_0^\infty u(t - t_0) g(t - t_0) \cdot e^{-st} dt = \int_{t_0}^\infty g(t - t_0) \cdot e^{-st} dt$$

ponendo  $t - t_0 = x$ , da cui  $t = t_0 + x$ ,  $dt = dx$  si ha

$$L[f(t - t_0)] = \int_0^\infty g(x) \cdot e^{-s(x+t_0)} dx = e^{-st_0} \cdot \int_0^\infty g(x) \cdot e^{-sx} dx = e^{-st_0} \cdot F(s)$$

Quindi é:

$$L[f(t - t_0)] = F(s) \cdot e^{-st_0}$$

.

### 0.2.3 Metodi di antitrasformazione

Nel seguito si vedrá che il metodo di risoluzione di un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti e con date condizioni iniziali mediante la trasformata di Laplace consiste nello scrivere un'espressione algebrica  $Y(s)$ , che é la trasformata della soluzione  $y(t)$ .

La trasformata  $Y(s)$  si presenta in generale nella forma  $F(s)/G(s)$ , dove  $F(s)$  e  $G(s)$  sono polinomi in  $s$  che non hanno fattori comuni; inoltre il grado del polinomio  $F(s)$  é inferiore al grado di  $G(s)$ .

Noto  $Y(s)$  é quindi necessario risalire a  $y(t)$ . Un primo metodo consiste nel consultare una tabella che riporta funzioni del tempo e loro trasformate nel dominio della variabile  $s$ : esistono handbook ricchissimi di funzioni con le loro trasformate. Se  $Y(s)$  compare nella lista, l'antitrasformazione é immediata. Se  $Y(s)$  non é compresa nella lista, occorre procedere ad alcune manipolazioni algebriche per ricondursi alle funzioni comprese in tabella.

**Metodo delle frazioni parziali**

Un metodo ben noto consiste nello scrivere  $Y(s)$  come una somma di frazioni parziali, per poi risalire alla  $y(t)$  come somma delle antitrasformate di ciascuna frazione parziale. (La scomposizione in frazioni parziali é normalmente illustrata nei testi di algebra.)

Facciamo un primo esempio.

Sia:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)}$$

Scriviamo la scomposizione di  $Y(s)$  nella seguente forma:

$$\frac{s+1}{s(s^2+4s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+8}$$

facendo il denominatore comune al secondo membro otteniamo:

$$s+1 \equiv A(s^2+4s+8) + (Bs+C)s$$

$$s+1 \equiv (A+B)s^2 + (4A+C)s + 8A$$

Perché le due espressioni a primo e secondo membro siano equivalenti devono coincidere i coefficienti delle corrispondenti potenze di  $s$ . Deve pertanto risultare:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 4A+C &= 1 \\ 8A &= 1 \end{aligned}$$

da cui si ricava immediatamente:

$$A = 1/8 \quad B = -A = -1/8 \quad C = 1 - 4A = 4/8$$

Riscriviamo la  $Y(s)$  come somma di frazioni parziali:

$$Y(s) = \frac{1}{8s} - \frac{s-4}{8(s^2+4s+8)} = \frac{1}{8} \frac{1}{s} - \frac{1}{8} \frac{(s+2)-6}{(s+2)^2+2^2}$$

e ricorrendo alla tabella possiamo scrivere

$$y(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot e^{-2t}(\cos 2t - 3 \sin 2t)$$

Affrontiamo ora un secondo esempio, in cui é presente un termine al quadrato.

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$$

In questo caso la struttura dell'espressione con frazioni parziali é:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

e facendo il denominatore comune

$$1 \equiv A(s+1)(s^2+4) + B(s^2+4) + (Cs+D)(s+1)^2$$

$$1 \equiv (A+C)s^3 + (A+B+2C+D)s^2 + (4A+C+2D)s + (4A+4B+D)$$

da cui risulta:

$$A = \frac{2}{25} \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{2}{25} \quad D = -\frac{3}{25}$$

e antitrasformando

$$y(t) = \frac{2}{25} e^{-t} + \frac{1}{3} t e^{-t} - \frac{2}{25} \cos 2t - \frac{3}{50} \sin 2t$$

**Metodo d'espansione di Heaviside**

Teorema. Se  $Y(s) = F(s)/G(s)$ , dove  $F(s)$  e  $G(s)$  sono polinomi in  $s$  e il grado di  $F(s)$  é inferiore al grado di  $G(s)$  e se

$$G(s) = (s - a_1)(s - a_2) \dots (s - a_n),$$

dove  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono costanti reali o complesse, allora

$$Y(s) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{s - a_r} \cdot \frac{F(a_r)}{(a_r - a_1) \dots (a_r - a_{r-1})(a_r - a_{r+1}) \dots (a_r - a_n)}$$

$$Y(s) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{s - a_r} \cdot \left[ \frac{(s - a_r) F(s)}{G(s)} \right]_{s=a_r}.$$

La funzione  $y(t)$ , antitrasformata di  $Y(s)$ , é:

$$y(t) = \sum_{r=1}^n \left[ \frac{(s - a_r) F(s)}{G(s)} \right]_{s=a_r} \cdot e^{a_r t}.$$

La dimostrazione di questo teorema é molto semplice: per essa si rimanda ad un testo di algebra. Facciamo un esempio.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Effettuiamo l'espansione di Heaviside:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{s+1} \frac{1}{(-1) \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{s+2} \frac{1}{(-2)(-1) \cdot 1} + \frac{1}{s+3} \frac{1}{(-3)(-2)(-1)}$$

da cui

$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$$

Il metodo ora presentato copre il caso in cui il denominatore  $G(s)$  di  $Y(s)$  ammette solo radici semplici. Nel caso di radici multiple si usano forme evolute del teorema di Heaviside: per esse si rimanda a testi specializzati. Per gli scopi del presente corso é sufficiente quanto detto finora. Segue una tabella che riporta le principali funzioni di interesse per il presente corso e le loro trasformate.

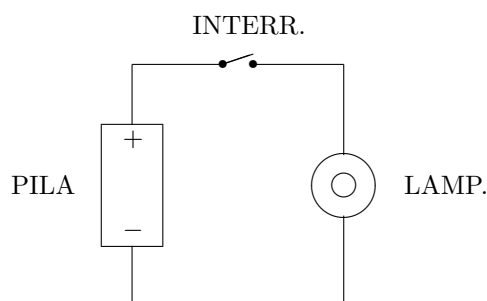
$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$ (con $a > 0$ )	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$f(t-t_0)$	$F(s)e^{-st_0}$
$\int_{-\infty}^t f(t)dt = f_0 + \int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f_0}{s}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^+)$

# Capitolo 1

## Teoria delle reti elettriche ideali: elementi introduttivi

### 1.1 Terminologia di base

Tutti noi al buio abbiamo maneggiato una torcia elettrica per farci luce. La torcia elettrica é composta da un astuccio in cui sono posti: una pila, una lampadina, delle connessioni e un interruttore. Azionando l'interruttore possiamo accendere o spegnere la torcia. Possiamo disegnare uno schemino che illustra come é fatta una torcia:



Abbiamo disegnato uno **schema elettrico** o, piú semplicemente, uno **schema**, che rappresenta la nostra torcia. In esso sono presenti: la pila, che é un **componente attivo**, in quanto applica potenza; una lampadina, che é un **componente passivo**, che usa la potenza e la trasforma in luce e calore; un interruttore, che chiuso al tempo  $t = t_0$  inserisce la variabile **tempo**. Perché il tutto possa funzionare é necessario che i vari componenti siano connessi in un cammino chiuso, o **circuito**, in cui possa scorrere la corrente elettrica. Questo della torcia é un semplicissimo circuito con pochissimi componenti. In generale in uno schema pratico é presente un numero ben maggiore di componenti: in questi casi si preferisce parlare di **rete elettrica**, che viene comunque rappresentata mediante uno schema elettrico.

Possiamo ora passare a studiare le reti ideali, composte di componenti ideali. Studieremo dapprima i componenti, poi alcune leggi e teoremi generali che ci consentono di calcolare il comportamento delle reti.

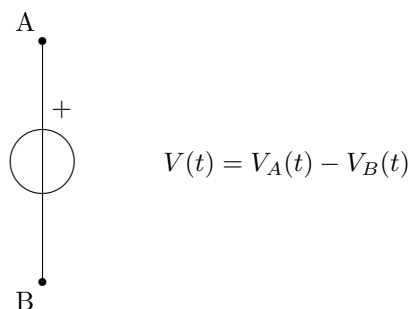
## 1.2 I componenti attivi ideali indipendenti

I componenti attivi ideali indipendenti sono soltanto due: il **generatore ideale indipendente di tensione**; il **generatore ideale indipendente di corrente**. Essendo componenti ideali possono non avere un riscontro diretto con componenti reali.

*Nota* - Il termine *generatore* é fisicamente errato: infatti non é possibile generare energia, ma soltanto trasformarla, o convertirla, da una forma ad un'altra. Storicamente però é invalso l'uso del termine generatore, e in tutta la letteratura elettrica viene normalmente usato. Pertanto anche noi useremo il termine *generatore*, avendo ben in mente che in realtà esso sta per convertitore.

### 1.2.1 Il generatore ideale indipendente di tensione

Le caratteristiche del generatore ideale indipendente di tensione sono ben riassunte nel simbolo con cui viene rappresentato.



$V(t)$  é la differenza di potenziale, o **tensione**, fra i morsetti A e B. Quando  $V(t)$  é positiva, il morsetto A é a potenziale positivo rispetto al morsetto B come indicato dal segno + posto accanto al simbolo del generatore. Se  $V(t) = V_0$  (costante), allora avremo un generatore di tensione costante.

Il generatore ideale di tensione mantiene in ogni istante ai suoi morsetti la tensione  $V(t)$  indipendentemente dalla intensità della corrente che lo percorre. Si suol dire che la resistenza interna del generatore ideale di tensione é nulla. La corrente può percorrerlo in entrambi i sensi.

Se il generatore viene spento, al suo posto resta una connessione senza resistenza (un cortocircuito): la continuità del circuito viene mantenuta.

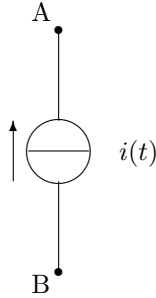
Nel dominio della frequenza complessa  $s$  sarà:

$$V(s) = L[V(t)]$$

*Nota* - Si usa scrivere  $V(t)$  e non  $\Delta V(t)$  in quanto, trattandosi sempre di differenze di potenziale, non c'è dubbio che  $V(t)$  sia una differenza di potenziale. In tal modo si evita di appesantire tutte le formule con dei  $\Delta$  inutili. Inoltre spesso sul generatore si usa scrivere  $E(t)$  al posto di  $V(t)$  in modo da distinguere nei conti una generica tensione incognita  $V(t)$  da una tensione impressa da un generatore.

### 1.2.2 Il generatore ideale indipendente di corrente

Le caratteristiche del generatore ideale indipendente di corrente sono ben riassunte nel simbolo con cui viene rappresentato.



$i(t)$  é la corrente che attraversa il generatore e quando é positiva scorre nel senso indicato dalla freccia. Se  $i(t) = i_0$  (costante), avremo un generatore di corrente costante.

Il generatore ideale di corrente eroga in ogni istante la corrente  $i(t)$  indipendentemente dalla tensione che si sviluppa ai suoi morsetti, che può essere di qualsiasi polarità. Si suol dire che la resistenza interna di un generatore di corrente é infinita

Se il generatore viene spento, al suo posto resta una interruzione: il circuito rimane aperto in quel punto. Nel dominio della frequenza complessa  $s$  sarà:

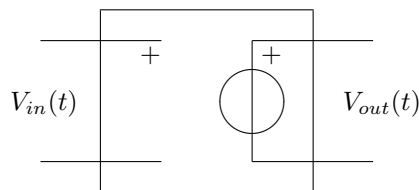
$$I(s) = L[i(t)]$$

### 1.3 I generatori ideali dipendenti o comandati

I generatori ideali dipendenti sono quattro, poiché possono essere generatori di tensione o di corrente, a loro volta comandati di tensione o di corrente.

#### 1.3.1 Il generatore ideale dipendente di tensione comandato di tensione

Il generatore ideale dipendente di tensione comandato di tensione é rappresentato schematicamente con un blocco, avente due morsetti in ingresso e due morsetti in uscita, così come illustrato nella figura che segue.



$$V_{out}(t) = k \cdot V_{in}(t)$$

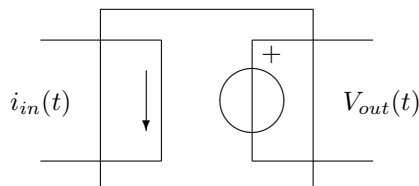
L'ingresso del nostro blocco é un circuito aperto: quindi legge la tensione  $V_{in}(t)$  fra due punti del circuito, cui é connesso, senza derivarne corrente, quindi senza perturbarlo. La tensione d'uscita  $V_{out}(t)$  é linearmente proporzionale alla tensione d'ingresso  $V_{in}(t)$  secondo la costante adimensionata  $k$ . Il circuito d'uscita presenta le stesse caratteristiche di un generatore ideale di tensione. I segni  $+$  in ingresso e in uscita danno la relazione fra le polarità dei segnali di ingresso e d'uscita.

Nel dominio della frequenza complessa  $s$  sarà:

$$V_{out}(s) = k \cdot V_{in}(s)$$

### 1.3.2 Il generatore ideale dipendente di tensione comandato di corrente

Il generatore ideale dipendente di tensione comandato di corrente é rappresentato schematicamente con un blocco, avente due morsetti in ingresso e due morsetti in uscita, cosí come illustrato nella figura che segue.



$$V_{out}(t) = r \cdot i_{in}(t)$$

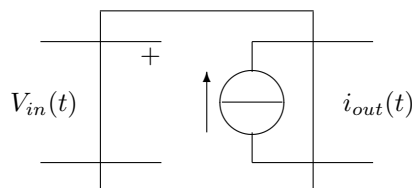
L'ingresso del nostro blocco é un cortocircuito: quindi si inserisce nel circuito, cui é connesso, senza alterarne le tensioni, quindi senza perturbarlo. La tensione d'uscita  $V_{out}(t)$  é linearmente proporzionale alla corrente d'ingresso  $i_{in}(t)$  secondo la costante dimensionata  $r$ . Il circuito d'uscita presenta le stesse caratteristiche di un generatore ideale di tensione. La freccia in ingresso e il segno  $+$  in uscita danno la relazione fra il senso della corrente positiva di ingresso e la polaritá positiva della tensione d'uscita. La costante dimensionata  $r$  prende il nome di transresistenza.

Nel dominio della frequenza complessa  $s$  sará:

$$V_{out}(s) = r \cdot I_{in}(s)$$

### 1.3.3 Il generatore ideale dipendente di corrente comandato di tensione

Il generatore ideale dipendente di corrente comandato di tensione é rappresentato schematicamente con un blocco, avente due morsetti in ingresso e due morsetti in uscita, cosí come illustrato nella figura che segue.



$$i_{out}(t) = s \cdot V_{in}(t)$$

L'ingresso del nostro blocco é un circuito aperto: quindi legge la tensione  $V_{in}(t)$  fra due punti del circuito, cui é connesso, senza derivarne corrente, quindi senza perturbarlo. La corrente d'uscita  $i_{out}(t)$  é linearmente proporzionale alla tensione d'ingresso  $V_{in}(t)$  secondo la costante dimensionata  $s$ , detta transconduttanza. Il circuito d'uscita presenta le stesse caratteristiche di un generatore ideale di corrente. Il segno  $+$  in ingresso e la freccia in uscita danno la relazione fra la polaritá positiva della tensione di ingresso e il senso positivo della corrente d'uscita.

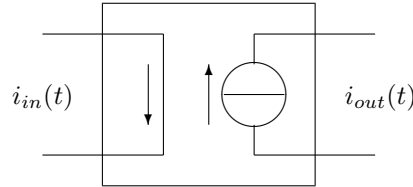
Nel dominio della frequenza complessa  $s$  sará:

$$I_{out}(s) = s \cdot V_{in}(s)$$



### 1.3.4 Il generatore ideale dipendente di corrente comandato di corrente

Il generatore ideale dipendente di corrente comandato di corrente é rappresentato schematicamente con un blocco, avente due morsetti in ingresso e due morsetti in uscita, cosí come illustrato nella figura che segue.



$$i_{out}(t) = h \cdot i_{in}(t)$$

L'ingresso del nostro blocco é un cortocircuito: quindi si inserisce nel circuito, cui é connesso, senza alterarne le tensioni, quindi senza perturbarlo. La corrente d'uscita  $i_{out}(t)$  é linearmente proporzionale alla corrente d'ingresso  $i_{in}(t)$  secondo la costante adimensionata  $h$ . Il circuito d'uscita presenta le stesse caratteristiche di un generatore ideale di corrente. Le frecce in ingresso e in uscita danno la relazione fra i sensi positivi delle correnti di ingresso e d'uscita.

Nel dominio della frequenza complessa  $s$  sará:

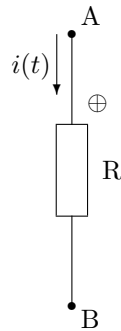
$$I_{out}(s) = h \cdot I_{in}(s)$$

## 1.4 I componenti passivi ideali

Tre sono i componenti passivi ideali: il resistore, il condensatore, l'induttore.

### 1.4.1 Il resistore

Il resistore viene schematizzato con il simbolo grafico che segue:



Per il resistore vale la legge di Ohm (ben nota in Fisica) che lega la differenza di potenziale ai capi del resistore con la corrente che lo attraversa:

$$V_A(t) - V_B(t) = R \cdot i(t)$$

quando la corrente  $i(t)$  percorre il resistore dal morsetto A al morsetto B, quindi quando la corrente é concorde col senso indicato dalla freccia.  $R$  é una costante dimensionata, detta *resistenza*. Nella pratica

si usa indicare la differenza di potenziale ai capi del resistore con  $V_R(t)$ , che risulta positiva quando la corrente positiva entra dal morsetto contrassegnato dall'indicazione  $\oplus$ . Quindi si scrive:

$$V_R(t) = R \cdot i(t)$$

Nel dominio della variabile  $s$  la relazione suddetta diviene:

$$V_R(s) = R \cdot I(s)$$

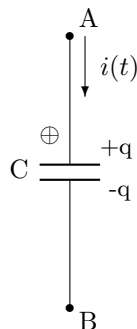
Occorre ricordare che per il resistore vale la legge di Joule, relativa alla potenza dissipata istante per istante:

$$w(t) = V_R(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t).$$

Il resistore é un componente passivo dissipativo, che dissipa in calore la potenza  $w(t)$  sviluppata al suo interno.

### 1.4.2 Il condensatore

Il condensatore viene schematizzato con il simbolo grafico che segue:



Per il condensatore vale la ben nota legge fisica che lega la differenza di potenziale ai capi del condensatore con la carica che vi é immagazzinata:

$$V_A(t) - V_B(t) = \frac{q(t)}{C}$$

essendo  $q(t)$  l'intensità della carica immagazzinata nel condensatore: sulle due armature sono depositate due distribuzioni di carica di uguale intensità ma di segno opposto, come indicato in figura. Una corrente  $i(t)$  positiva, cioè entrante concorde con la direzione della freccia, incrementa la carica immagazzinata e fa aumentare la differenza di potenziale ai capi del condensatore.

Nella pratica, indicando con  $V_C(t)$  la tensione ai capi del condensatore, si usa scrivere:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}.$$

La tensione  $V_C(t)$  é positiva quando il morsetto contrassegnato da  $\oplus$  é positivo.

Mettiamo in evidenza la dipendenza di  $V_C(t)$  dalla corrente  $i(t)$ . Possiamo scrivere:

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) \cdot dt.$$

Ne deriva che la tensione  $V_C(t)$  é il risultato dell'accumulo di corrente nel condensatore dall'inizio ( $-\infty$ ) fino al tempo  $t$ . Si dice che il condensatore ha *memoria* del passato. Questo fatto ci viene spiegato da

un'altra legge fisica relativa al condensatore, precisamente quella relativa all'energia immagazzinata nel campo elettrico presente nel volume del condensatore:

$$U_C(t) = \frac{1}{2} \frac{(q(t))^2}{C} = \frac{1}{2} C (V(t))^2$$

Il condensatore non dissipa energia, ma la immagazzina nel suo volume ed é pronto a restituirla. A quest'energia immagazzinata va attribuita la memoria del condensatore.

Scriviamo la relazione tensione-corrente del condensatore nel dominio della frequenza complessa  $s$ :

$$L[V_C(t)] = \frac{1}{C} L \left[ \int_{-\infty}^t i(t) \cdot dt \right],$$

da cui si ottiene

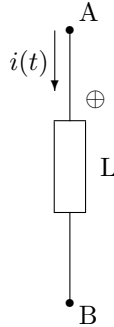
$$V_C(s) = \frac{q_0}{sC} + \frac{I(s)}{sC}$$

essendo

$$q_0 = \int_{-\infty}^0 i(t) \cdot dt, \quad I(s) = L[i(t)].$$

### 1.4.3 L'induttore

L'induttore viene schematizzato con il simbolo grafico che segue:



Per l'induttore vale la legge di Faraday-Newmann-Lenz, che lega la forza elettromotrice  $E$  che si genera ai capi dell'induttore per effetto di una variazione del flusso magnetico  $\Phi$  concatenato ad esso:

$$E(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Ricordiamo poi che vale la legge

$$\Phi(t) = L \cdot i(t)$$

che lega il flusso concatenato con l'induttore alla corrente che lo percorre, essendo  $L$  l'induttanza dell'induttore.

Nella pratica, indicando con  $V_L(t)$  la tensione ai capi dell'induttore, presa positiva in accordo con il segno  $\oplus$ , e prendendo positiva la corrente  $i(t)$  quando scorre in accordo con il senso della freccia, la legge dell'induttore diviene:

$$V_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}.$$

(La scelta dei segni di  $V_L(t)$  e di  $i(t)$  tiene conto del segno  $-$  della legge di FNL.)  
Invertendo la legge ora scritta si ottiene:

$$i_C(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t V_L(t) \cdot dt.$$

Ne deriva che la corrente  $i_C(t)$  é il risultato dell'accumulo della tensione nell'induttore dall'inizio  $(-\infty)$  fino al tempo  $t$ . Si dice che l'induttore ha *memoria* del passato. Questo fatto ci viene spiegato da un'altra legge fisica relativa all'induttore, precisamente quella relativa all'energia immagazzinata nel campo magnetico responsabile del flusso concatenato con l'induttore:

$$U_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L(i_L(t))^2$$

L'induttore non dissipa energia, ma la immagazzina nel flusso concatenato ed é pronto a restituirla. A quest'energia immagazzinata va attribuita la memoria dell'induttore.

Scriviamo la relazione tensione-corrente dell'induttore nel dominio della frequenza complessa  $s$ :

$$L[V_L(t)] = L \cdot L \left[ \frac{di(t)}{dt} \right],$$

da cui si ottiene

$$V_L(s) = sL \cdot I(s) - Li_0$$

essendo

$$i_0 = \int_{-\infty}^0 V_L(t) \cdot dt, \quad I(s) = L[i(t)].$$

#### 1.4.4    Considerazioni conclusive sui componenti passivi ideali

Riscriviamo qui di seguito le relazioni tensione-corrente dei tre componenti passivi ideali nel dominio della frequenza complessa  $s$ :

$$\begin{aligned} V_R(s) &= R \cdot I(s) \\ V_C(s) &= \frac{I(s)}{sC} + \frac{q_0}{sC} \\ V_L(s) &= sL \cdot I(s) - Li_0 \end{aligned}$$

Notiamo che con l'uso della trasformata di Laplace si ha l'introduzione automatica delle condizioni iniziali per il condensatore e per l'induttore, ove può essere presente inizialmente dell'energia (memoria del passato).

Consideriamo che inizialmente non vi sia energia nei componenti reattivi (condensatore:  $q_0 = 0$ ; induttore:  $i_0 = 0$ ). Le tre relazioni tensione-corrente possono essere riscritte così:

$$\begin{aligned} V_R(s) &= R \cdot I(s) \\ V_C(s) &= \frac{I(s)}{sC} \\ V_L(s) &= sL \cdot I(s) \end{aligned}$$

Le tre relazioni possono ora essere sintetizzate nell'unica relazione che segue:

$$V_Z(s) = Z(s) \cdot I(s)$$

Questa relazione prende il nome di *Legge di Ohm generalizzata nel campo della frequenza complessa  $s$* .  $Z(s)$  é l'impedenza complessa e vale:

$$\begin{aligned} Z_R(s) &= R \\ Z_C(s) &= \frac{1}{sC} \\ Z_L(s) &= sL \end{aligned}$$

Al posto dei tre componenti passivi ideali, che abbiamo studiato, possiamo sostituire un solo componente passivo ideale  $Z$ , la cui impedenza complessa  $Z(s)$  tiene conto della realtà del circuito. Essendo un'impedenza complessa, essa avrà una parte reale resistiva (quindi dissipativa) e una parte immaginaria reattiva (con memoria).

## 1.5 Interconnessione di componenti ideali: le reti ideali

Abbiamo studiato i componenti ideali. Vediamo ora come essi sono interconnessi a formare quelle che sono chiamate le reti ideali e come si calcola il comportamento elettrico di queste reti. Aiutiamoci con il seguente disegno di una generica rete.

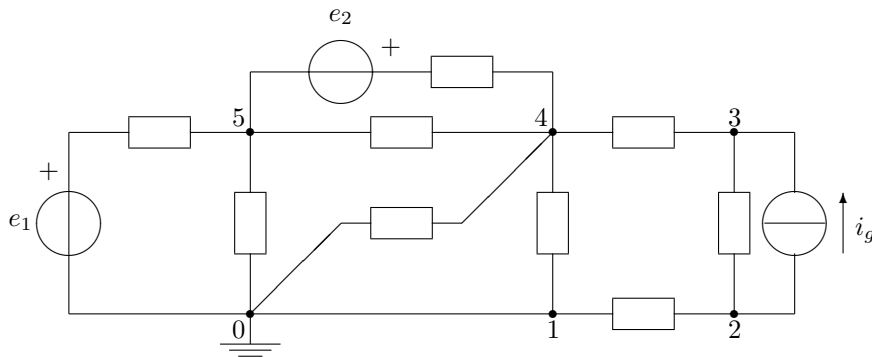


Fig. 1.1

In Fig. 1.1 é rappresentata una rete composta da 2 generatori indipendenti di tensione  $e_1, e_2$ , da un generatore indipendente di corrente  $i_g$  e da 9 impedenze. Premettiamo alcune definizioni:

**ramo** - tratto fra due nodi, che include almeno un componente;

**nodo** - confluenza di 3 o piú rami;

**maglia** - percorso chiuso che inizia e termina nello stesso nodo.

Nel nostro caso sono presenti: 5 nodi; 10 rami. Notiamo che i nodi contrassegnati con 0 e 1 sono in realtà lo stesso nodo, in quanto non c'è alcun componente fra loro.

Lo studio di una rete consiste nel determinare i valori di tensione e di corrente in tutti i rami. Per far ciò bisogna scegliere delle incognite (tensioni o correnti) e scrivere le equazioni che permettono di determinarle. Due sono i tipi di equazioni utilizzabili: le equazioni ai nodi; le equazioni alle maglie. Vediamole in dettaglio.

### 1.5.1 Equazioni ai nodi

I nodi non hanno capacità: quindi non possono accumulare carica. Pertanto in un nodo deve essere sempre:

$$q_N(t) = 0, \quad \frac{dq_N(t)}{dt} = 0.$$

Questo comporta che la somma delle correnti che confluiscono in un nodo deve essere sempre nulla: alcune correnti saranno positive, altre negative in modo da soddisfare la condizione suddetta. L'espressione dell'equazione ai nodi é la seguente:

$$\sum_r i_r = 0$$

dove la somma é estesa alle correnti di tutti i rami che confluiscono nel nodo. Per calcolare la corrente che confluisce nel nodo da un ramo si calcola la differenza fra la tensione del nodo interessato e la tensione del nodo all'altro capo del ramo e si divide questa differenza per l'impedenza del ramo.

Quante equazioni ai nodi dobbiamo scrivere per risolvere la rete? Tante quanti sono i nodi indipendenti, poiché in questo caso *le incognite sono le tensioni ai nodi*. Le tensioni, essendo differenze di potenziale, vanno misurate rispetto ad un riferimento prefissato. Quindi si sceglie un nodo di riferimento, al quale viene assegnato convenzionalmente un potenziale nullo: le tensioni degli altri nodi sono le differenze di potenziale misurate rispetto al nodo di riferimento. Se  $n_n$  é il numero dei nodi di una rete, il numero di nodi indipendenti é  $n_n - 1$  e questo é il numero delle equazioni ai nodi necessarie per risolvere la rete. Nel caso di Fig. 1.1, il numero di nodi é 5 e il numero di nodi indipendenti é 4: quindi 4 sono le equazioni necessarie per risolvere tale rete. Il nodo di riferimento é il nodo 0, contrassegnato con il simbolo di massa.

Nota. - Per massa s'intende la massa metallica dello strumento. Normalmente la massa metallica dello strumento viene connessa a terra, in modo da vincolare a zero per motivi di sicurezza il potenziale esterno dello strumento che si sta usando.

### 1.5.2 Equazioni alle maglie

Per la conservatività del campo elettrico la somma della cadute di potenziale lungo i rami di una maglia deve essere uguale a zero. Lungo ogni maglia vale la seguente equazione:

$$\sum_r V_r = 0$$

dove la somma é estesa a tutti i rami che costituiscono la maglia. Per calcolare le tensioni lungo ogni ramo occorre moltiplicare la somma delle correnti, che percorrono detto ramo, per l'impedenza del ramo (un ramo può essere comune a più maglie). In questo caso *le incognite sono le correnti che scorrono nelle maglie indipendenti*.

Quante equazioni alle maglie dobbiamo scrivere per risolvere la rete? Tante quante sono le maglie indipendenti, cioè tante quante sono le correnti di maglia indipendenti. Scegliere le maglie indipendenti in un circuito complesso può non essere facile. Siamo guidati dalla seguente relazione:

$$n_{maglie} = n_{rami} - (n_{nodi} - 1)$$

dove  $n_{maglie}$  é il numero di maglie indipendenti.

Nel caso del circuito di Fig. 1.1 il numero di maglie indipendenti é:  $n_{maglie} = 10 - (5 - 1) = 6$ . Sono quindi necessarie 6 equazioni con 6 incognite.

## 1.6 Esempio di calcolo di una semplice rete

### 1.6.1 Uso delle equazioni ai nodi

Calcoliamo la semplice rete di Fig. 1.2.

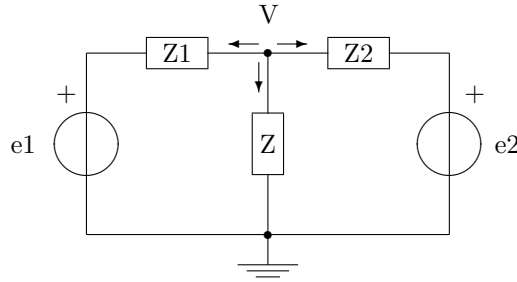


Fig. 1.2

Sono presenti 3 rami e 2 nodi. Il numero di nodi indipendenti é 1: occorre una sola equazione ai nodi con la sola incognita  $V$ , la tensione del nodo indipendente. Il nodo di riferimento é contrassegnato dal simbolo di massa. Dal nodo  $V$  si dipartono 3 rami. Dobbiamo scrivere che la somma delle 3 correnti uscenti dal nodo é nulla. Sullo schema le tre freccette indicano il senso delle correnti uscenti. Scriviamo l'equazione direttamente nel dominio della variabile  $s$ .

$$\frac{V(s) - E1(s)}{Z1(s)} + \frac{V(s)}{Z(s)} + \frac{V(s) - E2(s)}{Z2(s)} = 0$$

Per alleggerire la scrittura tralasciamo l'indicazione della dipendenza dalla variabile  $s$  e svolgiamo i calcoli:

$$V \cdot \left( \frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z2} \right) = \frac{E1}{Z1} + \frac{E2}{Z2}$$

$$V = \frac{\frac{E1}{Z1} + \frac{E2}{Z2}}{\frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z2}}$$

$$V = Z \cdot \frac{E1 \cdot Z2 + E2 \cdot Z1}{Z \cdot Z2 + Z1 \cdot Z2 + Z \cdot Z1}$$

La corrente che scorre nell'impedenza  $Z$  vale:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{E1 \cdot Z2 + E2 \cdot Z1}{Z \cdot Z2 + Z1 \cdot Z2 + Z \cdot Z1}$$

Un valore positivo di  $I$  indica che la corrente positiva scorre concorde col senso indicato dalla freccetta relativa a  $Z$  sulla Fig. 1.2.

### 1.6.2 Uso delle equazioni alle maglie

Calcoliamo la semplice rete di Fig. 1.3.

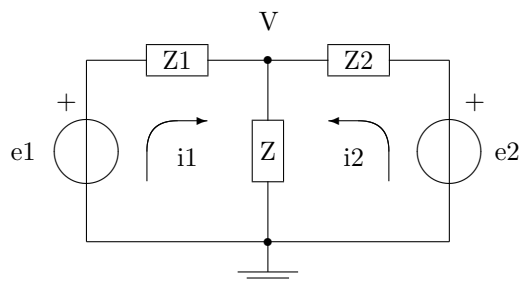


Fig. 1.3

Sono presenti 3 rami e 2 nodi. Il numero di maglie indipendenti é:  $n_m = 3 - (2 - 1) = 2$ . Sono quindi necessarie 2 equazioni con 2 incognite, che sono le correnti di maglia. Sulla Fig. 1.3 sono segnate le correnti incognite di maglia  $i1$  e  $i2$  con le frecce che ne indicano il senso positivo convenzionale. Risolte le equazioni e ottenute le correnti, saremo in grado di calcolare la tensione  $V$  del nodo nel modo seguente:

$$V = Z \cdot (I1 + I2).$$

poiché le due correnti si sommano nell'impedenza  $Z$ .

Passiamo a scrivere le equazioni alle maglie.

$$\begin{cases} -E1 + Z1 \cdot I1 + Z(I1 + I2) &= 0 \\ -E2 + Z2 \cdot I2 + Z(I1 + I2) &= 0 \end{cases}$$

e, sviluppando il calcolo,

$$\begin{cases} (Z1 + Z)I1 + Z \cdot I2 &= E1 \\ Z \cdot I1 + (Z2 + Z)I2 &= E2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (Z1 + Z)(Z2 + Z) - Z^2 \\ &= Z1 \cdot Z2 + Z \cdot Z2 + Z \cdot Z1 + Z^2 - Z^2 \\ &= Z1 \cdot Z2 + Z \cdot Z2 + Z \cdot Z1 \end{aligned}$$

Risolvendo con la tecnica dei sistemi lineari

$$I1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} E1 & Z \\ E2 & Z2 + Z \end{vmatrix} = \frac{E1(Z2 + Z) - ZE2}{\Delta}$$

$$I2 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} Z1 + Z & E1 \\ Z & E2 \end{vmatrix} = \frac{E2(Z1 + Z) - ZE1}{\Delta}$$

da cui

$$V = Z \cdot \frac{1}{\Delta} (E1(Z2 + Z) - Z \cdot E2 + E2(Z1 + Z) - Z \cdot E1) = Z \cdot \frac{E1 \cdot Z2 + E2 \cdot Z1}{Z \cdot Z2 + Z1 \cdot Z2 + Z \cdot Z1}$$

Il risultato ovviamente coincide con quello ottenuto con le equazioni ai nodi. In generale, quando il circuito non é semplicissimo, la tecnica delle equazioni ai nodi é piú agile e consente conti piú semplici.



## Capitolo 2

# Teoria delle reti elettriche ideali: teoremi delle reti

Introdurremo ora solo alcuni teoremi, i piú rilevanti.

### 2.1 Teorema della sovrapposizione

Consideriamo un generico sistema lineare di equazioni ai nodi nella variabile  $s$ :

$$\begin{cases} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \dots + G_{1n}V_n &= I_1 \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \dots + G_{2n}V_n &= I_2 \\ \dots\dots\dots \\ G_{n1}V_1 + G_{n2}V_2 + \dots + G_{nn}V_n &= I_n \end{cases}$$

Le incognite sono le tensioni ai nodi  $V_1, V_2, \dots, V_n$ .

I termini noti sono i generatori di corrente  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .

I  $G_{ij}$  sono i coefficienti della rete e sono combinazioni di impedenze.

Le equazioni sono tante quante sono le incognite.

La matrice dei coefficienti del sistema é una matrice quadrata.

Sia  $D$  il determinante della matrice dei coefficienti.

Sia  $\Delta_{ij}$  il minore complementare dell'elemento  $ij_{esimo}$ .

L'espressione generale della soluzione delle suddette equazioni é:

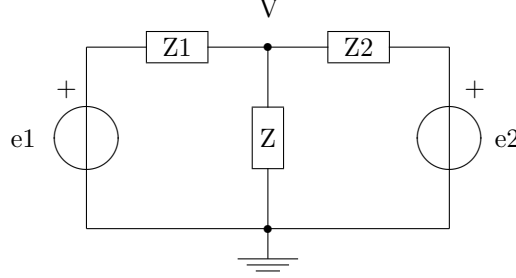
$$V_i = \frac{1}{D} \cdot (\Delta_{1i}I_1 + \Delta_{2i}I_2 + \dots + \Delta_{ni}I_n) \quad per \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Quest'espressione mette in evidenza il seguente fatto, espresso dall'enunciato del teorema: **la risposta complessiva della rete é la somma delle risposte della rete ai singoli generatori indipendenti, presi uno alla volta.** I generatori dipendenti sono sempre attivi.

Questo teorema é diretta conseguenza della linearitá e dimostra quanto sia importante il modello lineare. Per meglio coomprenderne l'importanza, consideriamo che un generico circuito avrá dei generatori indipendenti (gli alimentatori) che ne permettono il funzionamento e riceverá il segnale da elaborare da un altro generatore indipendente. Il teorema della sovrapposizione ci consente di studiare separatamente la polarizzazione del circuito, cioé la condizione in cui opererá, e altrettanto separatamente l'intervento sul segnale. In entrambi i casi potremo usare un circuito semplificato, orientato al problema da risolvere, piú semplice del circuito complessivo.

### 2.1.1 Esempio

Applichiamo il teorema della sovrapposizione alla soluzione del circuito di Fig.1.1, che ridisegniamo qui di seguito per comodità.



Ricordiamo che, quando si spegne un generatore indipendente di tensione, al suo posto resta una connessione senza resistenza. Poniamo  $E2 = 0$  e calcoliamo il contributo  $V(E1)$  di  $E1$  a  $V$ .

$$V(E1) = \frac{E1}{Z1 + (Z||Z2)} (Z||Z2)$$

(Il simbolo  $||$  indica che le due impedenze sono in parallelo.)

Poniamo  $E1 = 0$  e calcoliamo il contributo  $V(E2)$  di  $E2$  a  $V$ .

$$V(E2) = \frac{E2}{Z2 + (Z||Z1)} (Z||Z1)$$

Sommiamo i due contributi per ottenere  $V$ :  $V = V(E1) + V(E2)$

$$V = \frac{E1}{Z1 + (Z||Z2)} (Z||Z2) + \frac{E2}{Z2 + (Z||Z1)} (Z||Z1)$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$\begin{aligned} V &= \frac{E1}{Z1 + \frac{Z \cdot Z2}{Z + Z2}} \frac{Z \cdot Z2}{Z + Z2} + \frac{E2}{Z2 + \frac{Z \cdot Z1}{Z + Z1}} \frac{Z \cdot Z1}{Z + Z1} \\ &= \frac{E1 \cdot Z \cdot Z2}{Z1(Z + Z2) + Z \cdot Z2} + \frac{E2 \cdot Z \cdot Z1}{Z2(Z + Z1) + Z \cdot Z1} \\ &= Z \cdot \frac{E1 \cdot Z2 + E2 \cdot Z1}{Z \cdot Z2 + Z1 \cdot Z2 + Z \cdot Z1} \end{aligned}$$

e verifichiamo cosí che si ottiene la soluzione corretta, giá ottenuta al § 1.6.1.

## 2.2 Teorema di Thevenin

Si abbia una rete ideale comunque complessa, schematizzata in Fig 2.1, composta di componenti ideali, ivi compresi i generatori ideali dipendenti, e stimolata da generatori ideali indipendenti, che invia un segnale su un carico, cioè su un'impedenza  $Z_L(s)$ , come evidenziato in figura.

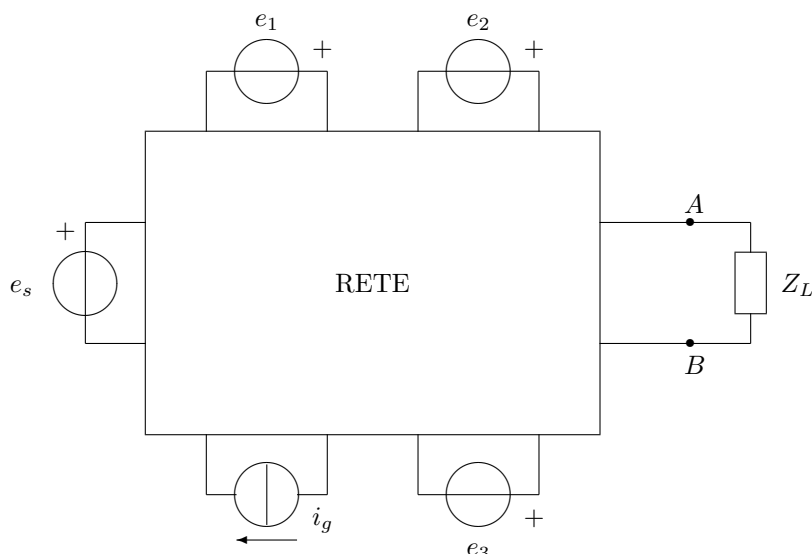


Fig. 2.1

Sulla base della linearità del sistema si dimostra che il comportamento della rete su  $Z_L(s)$  è descritto con **un semplice circuito equivalente, costituito da un generatore ideale indipendente di tensione  $E_0$  in serie con un'impedenza interna  $Z_0$**  e che si chiude su  $Z_L$ , come indicato nella Fig. 2.2 che segue.

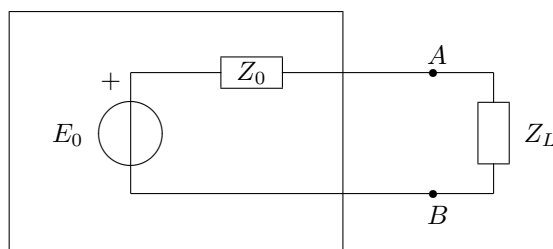


Fig. 2.2

Per l'equivalenza devono valere le seguenti condizioni:

- $E_0$  è la tensione a vuoto ai morsetti AB, cioè senza il carico  $Z_L$ .
- $Z_0$  è l'impedenza della rete vista dai morsetti AB.

Nel calcolo di  $E_0$  e di  $Z_0$  i generatori ideali dipendenti sono attivi.

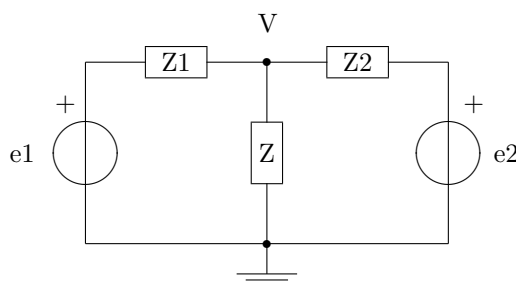
Questo teorema ha un ruolo fondamentale nell'elettronica. Basta pensare alla interconnessione di due strumenti comunque complessi. E' sufficiente conoscere il circuito equivalente d'uscita di uno e il circuito equivalente d'ingresso dell'altro per connetterli in un modo corretto che ne assicuri il miglior funzionamento.

Oppure pensiamo alla progettazione di uno strumento complesso. E' facile suddividere lo strumento complessivo in blocchi funzionali, specializzati ognuno in una particolare operazione. Definiti per ogni blocco

i circuiti equivalenti d'ingresso e d'uscita, la progettazione di ogni blocco sarà affidata a un progettista specialista, che la realizzerà al meglio. Alla fine i vari blocchi saranno interconnessi per realizzare lo strumento richiesto; essi insieme funzioneranno correttamente: c'è lo garantisce il teorema di Thevenin. Quindi uno strumento complesso non richiede una progettazione globale, che sarebbe estremamente difficile da effettuare; esso viene realizzato come unione di tanti strumenti più semplici, singolarmente realizzabili e collaudabili in modo ragionevolmente facile.

### 2.2.1 Esempio

Come esempio d'applicazione del teorema di Thevenin, risolviamo il circuito di Fig. 1.1, che ridisegniamo qui per comodità.



Stacciamo il carico  $Z$  e calcoliamo la tensione a vuoto  $E_0$  che si sviluppa nel nodo  $V$ , applicando l'equazione ai nodi.

$$\frac{E_0 - E_1}{Z_1} + \frac{E_0 - E_2}{Z_2} = 0$$

Eseguendo i calcoli otteniamo:

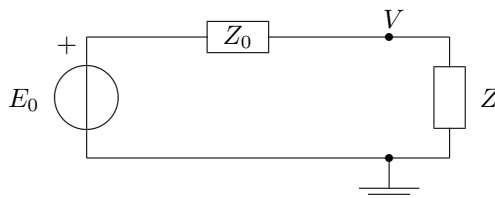
$$E_0 \cdot \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2}$$

$$E_0 = \frac{E_1 \cdot Z_2 + E_2 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Calcoliamo ora la impedenza della rete vista dall'uscita, spegnendo i generatori  $E_1$  ed  $E_2$  al cui posto resta una connessione con impedenza nulla. Pertanto abbiamo le due impedenze  $Z_1$  e  $Z_2$  in parallelo.

$$Z_0 = Z_1 || Z_2 = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Il circuito equivalente diviene:



$$V = \frac{E_0}{Z_0 + Z} \cdot Z = Z \cdot \frac{E_1 \cdot Z_2 + E_2 \cdot Z_1}{Z \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_2 + Z \cdot Z_1}$$

e si ritrova il risultato già noto.

## 2.3 Teorema di Norton. Sorgenti lineari.

Esaminiamo la Fig. 2.3 che segue.

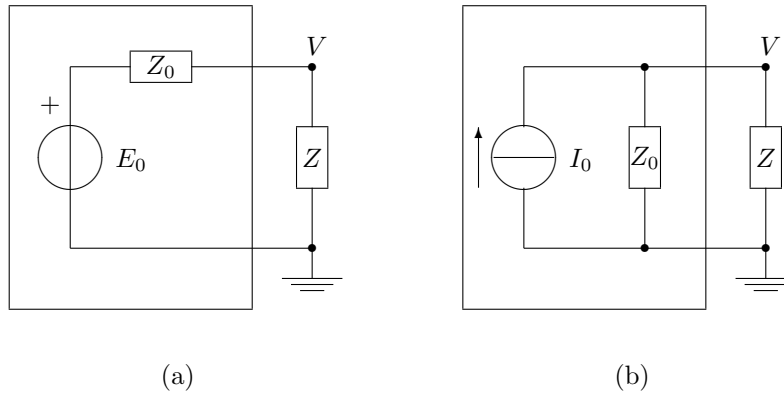


Fig. 2.3

Consideriamo il circuito di Fig. 2.3(a). Esso é costituito dal generatore ideale indipendente di tensione  $E_0$ , dall'impedenza 'interna' in serie  $Z_0$  e dal carico  $Z$ . Sul carico si sviluppa una tensione  $V$ , data da:

$$V = \frac{E_0}{Z_0 + Z} \cdot Z$$

Consideriamo il circuito di Fig. 2.3(b). Esso é costituito dal generatore ideale indipendente di corrente  $I_0$ , dall'impedenza 'interna' in parallelo  $Z_0$  e dal carico  $Z$ . Sul carico si sviluppa una tensione  $V$ , data da:

$$V = I_0(Z_0 || Z) = I_0 \cdot \frac{Z_0 \cdot Z}{Z_0 + Z} = \frac{I_0 \cdot Z_0}{Z_0 + Z} \cdot Z$$

Confrontando le tensioni  $V$  ottenute nei due casi, si vede che se vale la seguente *condizione di equivalenza*

$$E_0 = I_0 \cdot Z_0$$

esse sono identiche e di conseguenza anche i due circuiti sono equivalenti.

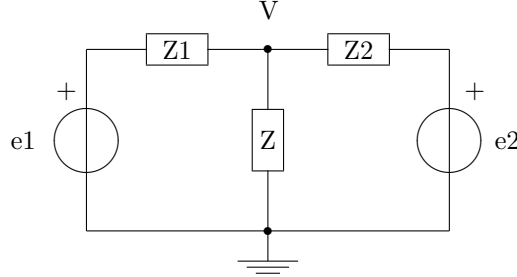
La combinazione di un generatore ideale di tensione in serie con un'impedenza interna (riquadro di Fig. 2.3(a)) é chiamata *sorgente lineare di tensione*. La combinazione di un generatore ideale di corrente avente in parallelo un'impedenza interna (riquadro di Fig. 2.3(b)) é chiamata *sorgente lineare di corrente*.

Una sorgente lineare di tensione può essere convertita nella equivalente sorgente lineare di corrente, e viceversa, se viene osservata la condizione di equivalenza suddetta.

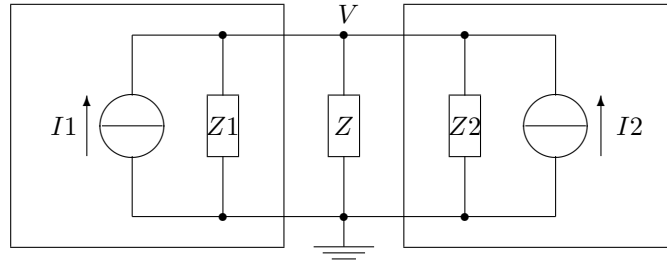
A questo punto risulta evidente che: i componenti ideali attivi indipendenti si riducono a uno, la *sorgente lineare*; i componenti ideali passivi si riducono a uno, l'*impedenza*. Abbiamo ottenuto una grande semplificazione, che ci verrà molto utile nel seguito. Ricordiamo che tutto quanto visto sinora é conseguenza dell'aver scelto un modello ideale lineare.

### 2.3.1 Esempio

Come esempio, applichiamo il teorema di Norton, cioè la conversione di sorgenti lineari di tensione in sorgenti lineari di corrente, per risolvere il circuito di Fig. 1.1, che ridisegnamo qui per comodità.



Effettuiamo la trasformazione delle sorgenti come indicato nella figura che segue.



Ovviamente,

$$I1 = \frac{E1}{Z1} \quad I2 = \frac{E2}{Z2}.$$

Calcolo immediatamente  $V$ :

$$V = I_t \cdot Z_p = (I1 + I2) \left( \frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z2} \right)^{-1}$$

$$V = \left( \frac{E1}{Z1} + \frac{E2}{Z2} \right) \frac{Z1 \cdot Z2 \cdot Z}{Z1 \cdot Z + Z2 \cdot Z + Z1 \cdot Z2}$$

infine

$$V = Z \cdot \frac{E1 \cdot Z2 + E2 \cdot Z1}{Z \cdot Z2 + Z1 \cdot Z2 + Z \cdot Z1}$$

e si ritrova il risultato già noto.

## Capitolo 3

# Calcolo di alcuni semplici circuiti

### 3.1 Circuito con un generatore dipendente

In Fig. 3.1 é tracciato lo schema di un circuito che contiene un generatore dipendente di corrente. Viene applicato un segnale  $E_g$  e si vuol calcolare la risposta  $V_u$ .

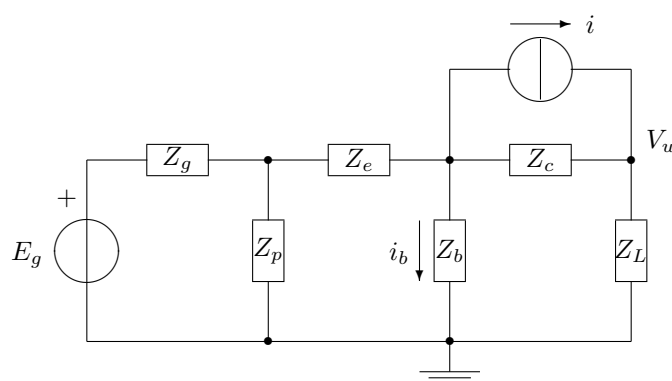


Fig. 3.1

Sono presenti: un generatore ideale indipendente di tensione  $E_g$ ; un generatore ideale dipendente di corrente  $i$  comandato di corrente  $i = \beta i_b$ ; sei impedenze. Si individuano 4 nodi. Sono quindi necessarie 3 equazioni ai nodi per risolvere il circuito. Ma possiamo avvalerci dei teoremi di Thevenin e di Norton per trasformare il circuito in modo da semplificarne la soluzione.

Trasformiamo la parte iniziale del circuito come indicato nella Fig. 3.2 che segue: nella parte (a) é disegnata la parte del circuito originario, nella parte (b) la sua trasformazione.

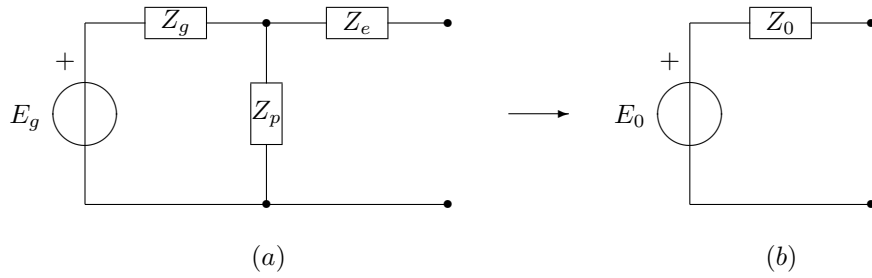


Fig. 3.2

Applicando Thevenin si ottiene:

$$E_0 = E_g \cdot \frac{Z_p}{Z_g + Z_p}$$

$$Z_0 = Z_e + (Z_g || Z_p) = Z_e + \frac{Z_g \cdot Z_p}{Z_g + Z_p}$$

Trasformiamo la parte restante del circuito come disegnato in Fig. 3.3, applicando il teorema di Norton.

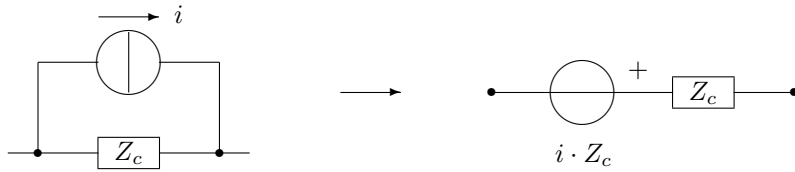


Fig. 3.3

Possiamo ridisegnare il circuito in Fig. 3.4 tenendo conto di queste trasformazioni.

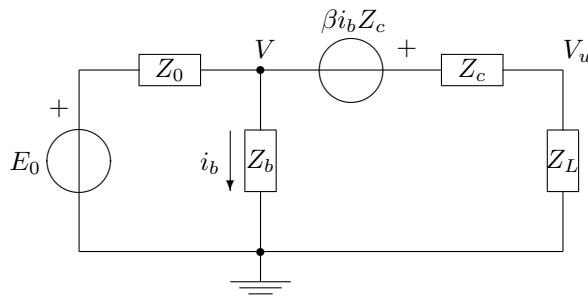


Fig. 3.4

Abbiamo ottenuto un circuito molto semplice, composto da 3 rami e 2 nodi. Ovviamente un nodo é il nodo di riferimento. Quindi é sufficiente una sola equazione al nodo  $V$  per risolvere il circuito. Scriviamola.

$$\frac{V - E_0}{Z_0} + \frac{V}{Z_b} + \frac{V + \beta i_b Z_c}{Z_c + Z_L} = 0$$

Essendo

$$i_b = \frac{V}{Z_b}$$



possiamo procedere nel calcolo, raccogliendo a primo membro i termini con  $V$  e portando a secondo membro i termini noti.

$$V \cdot \left( \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c + Z_L} \cdot (1 + \beta \frac{Z_c}{Z_b}) \right) = \frac{E_0}{Z_0}$$

Facendo i denominatori comuni e semplificando si ottiene:

$$V((Z_b + Z_0)(Z_c + Z_L) + (Z_b + \beta Z_c)Z_0) = E_0 \cdot Z_b(Z_c + Z_L)$$

da cui

$$V = \frac{E_0 \cdot Z_b(Z_c + Z_L)}{(Z_b + Z_0)(Z_c + Z_L) + (Z_b + \beta Z_c)Z_0}$$

Si noti che i termini che compaiono al denominatore hanno tutti segno positivo. Le impedenze hanno tutte parte reale positiva (resistiva). Pertanto la parte reale del denominatore é sempre positiva e non si può annullare mai.

Noto  $V$  é possibile calcolare  $V_u$  attraverso una semplice partizione lungo il ramo di  $V_u$ .

$$V_u = (V + \beta i_b Z_c) \frac{Z_L}{Z_c + Z_L}$$

da cui sostituendo e raccogliendo si ha:

$$V_u = V \cdot \frac{Z_b + \beta Z_c}{Z_b} \frac{Z_L}{Z_c + Z_L}$$

Avendo risolto la rete possiamo calcolarne la risposta  $V_u = V_u(E_g)$ . Per ridurre la pesantezza della scrittura poniamo:

$$D = (Z_b + Z_0)(Z_c + Z_L) + (Z_b + \beta Z_c)Z_0.$$

Risulta:

$$V_u = \frac{E_0 Z_b(Z_c + Z_L)}{D} \cdot \frac{Z_b + \beta Z_c}{Z_b} \frac{Z_L}{Z_c + Z_L} = \frac{1}{D} E_0 (Z_b + \beta Z_c) Z_L$$

da cui, ricordando l'espressione di  $E_0$ , si ha:

$$G = \frac{V_u}{E_g} = \frac{1}{D} (Z_b + \beta Z_c) Z_L \frac{Z_p}{Z_g + Z_p}$$

$G$  é il guadagno del circuito quando é connesso il carico  $Z_L$ .

## 3.2 Rilassamento di un circuito RC

### 3.2.1 Inserimento della condizione iniziale nell'equazione

Consideriamo il circuito di Fig. 3.5.

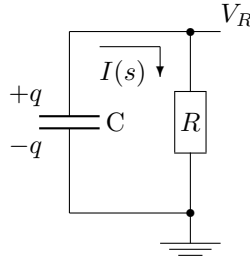


Fig. 3.5

E' costituito da una maglia in cui é presente un condensatore inizialmente ( $t=0$ ) carico con carica  $q$ . Il condensatore si scarica sul resistore  $R$  generando una corrente  $I$ . Vogliamo calcolare l'andamento della corrente con l'equazione delle maglie.

$$V_C(s) + V_R(s) = 0$$

Scrivendo direttamente le relazioni nel dominio della variabile  $s$  abbiamo:

$$\frac{I(s)}{sC} + \frac{-q}{sC} + I(s) \cdot R = 0$$

e risolvendo:

$$I(s) \cdot \left( \frac{1}{sC} + R \right) = \frac{q}{sC}$$

$$I(s) = \frac{q}{sC} \frac{1}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{q}{1 + sRC} = \frac{q}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Antitrasformando si ha:

$$i(t) = \frac{q}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_R(t) = \frac{q}{C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

### 3.2.2 Inserimento della condizione iniziale con la funzione impulsiva

Lo stesso circuito può essere disegnato nel modo equivalente (Fig. 3.6):

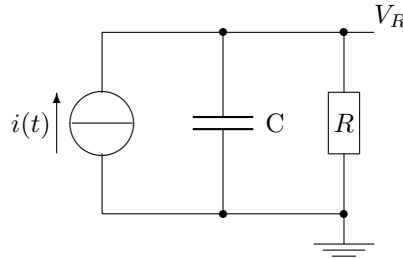


Fig. 3.6

dove  $i(t)$  é la funzione impulsiva, la delta di Dirac,  $i(t) = q \cdot \delta(t)$ , che al tempo  $t = 0$  inietta la carica  $q$  nel condensatore, caricandolo con l'armatura positiva verso  $V_R$ . Possiamo scrivere subito la soluzione:

$$V_R(s) = I(s) \cdot (Z_C || Z_R)$$

$$V_R(s) = q \frac{\frac{1}{sC} R}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{qR}{1 + sRC} = \frac{q}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

da cui

$$V_R(t) = \frac{q}{C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

### 3.3 Rilassamento di un circuito RL

#### 3.3.1 Inserimento della condizione iniziale nell'equazione

Consideriamo il circuito di Fig. 3.7.

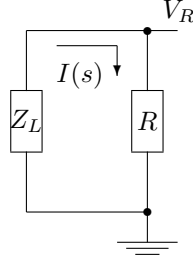


Fig. 3.7

All'induttore é associato un flusso magnetico pari a  $Li_0$ : l'induttore é inizialmente cortocircuitato ed in esso scorre la corrente  $i_0$ . Quando si stacca il cortocircuito la corrente  $i_0$  scorre nella maglia in senso concorde con la freccia di riferimento. Scriviamo l'equazione relativa alla maglia di Fig. 3.7 nel dominio della variabile  $s$ .

$$\begin{aligned} V_L(s) + V_R(s) &= 0 \\ sL \cdot I(s) - Li_0 + R \cdot I(s) &= 0 \\ I(s)(sL + R) &= Li_0 \\ I(s) &= \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

da cui antitrasformando si ha:

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad V_R(t) = Ri_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

#### 3.3.2 Inserimento della condizione iniziale con la funzione impulsiva

Consideriamo il circuito di Fig. 3.8.

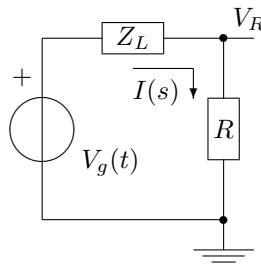


Fig. 3.8

Da  $E(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$  si ricava:  $V_g(t) = Li_0\delta t$ .  
Scriviamo l'equazione risolutiva della maglia:

$$-V_g(s) + V_L(s) + V_R(s) = 0$$

$$-Li_0 + sL \cdot I(s) + R \cdot I(s) = 0$$

$$I(s) \cdot (sL + R) = Li_0$$

$$I(s) = \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}}$$

da cui antitrasformando si ha:

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad V_R(t) = Ri_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

### 3.4 Rilassamento di un circuito LC

Consideriamo il circuito di Fig. 3.9.

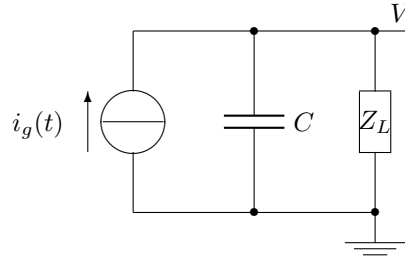


Fig. 3.9

Sia  $i_g(t) = q_0 \cdot \delta t$ . Calcoliamo  $V$ .

$$V(s) = I(s) \cdot (Z_C || Z_L)$$

$$V(s) = q_0 \cdot \frac{\frac{1}{sC} sL}{\frac{1}{sC} + sL} = q_0 \cdot \frac{sL}{1 + s^2 LC} = \frac{q_0}{C} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

Poniamo:

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Allora:

$$V(s) = \frac{q_0}{C} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

da cui antitrasformando si ha

$$V(t) = \frac{q_0}{C} \cdot \cos \omega_0 t = V_0 \cdot \cos \omega_0 t$$

Il parallelo di un condensatore ideale con un induttore ideale costituisce un oscillatore ideale. Iniettando un po' di carica, il circuito oscilla indefinitamente non essendo presente un componente dissipativo. L'energia presente si ripartisce, parte nel campo elettrico associato al condensatore, parte nel capo magnetico associato con l'induttore, oscillando fra i due.

### 3.5 Rilassamento di un circuito RLC

E' questa la condizione reale, in quanto nell'induttore e nelle connessioni é sempre presente una certa resistenza, che idealmente viene concentrata nel componente resistore. Consideriamo il circuito di Fig. 3.10.

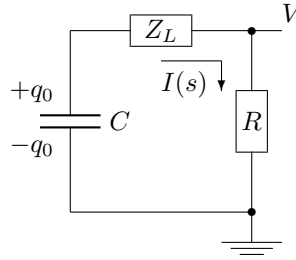


Fig. 3.10

Sul condensatore é inizialmente presente una carica  $q_0$ . All'induttore non é concatenato alcun flusso magnetico ( $L i_0 = 0$ ). Possiamo risolvere la maglia scrivendo l'equazione relativa.

$$\frac{I(s)}{sC} - \frac{q_0}{sC} + sL \cdot I(s) + R \cdot I(s) = 0$$

Facendo il denominatore comune e raccogliendo  $I(s)$  si ha:

$$I(s) \cdot (1 + s^2 LC + sRC) = q_0$$

da cui

$$V(s) = R \cdot I(s) = \frac{q_0 R}{s^2 LC + sRC + 1}$$

In questo modo sul resistore si visualizza l'andamento della corrente della maglia sotto forma di tensione variabile, osservabile all'oscilloscopio.

Operiamo alcune elaborazioni sull'espressione ottenuta, ricordando che l'espressione al denominatore é un trinomio di secondo grado. Come tale, esso può avere: due radici reali distinte; due radici reali coincidenti; una coppia di radici complesse coniugate. A queste tre condizioni corrispondono tre comportamenti diversi.

$$V(s) = \frac{q_0 R}{LC} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

poi aggiungendo e togliendo al denominatore il termine  $\frac{R^2}{4L^2}$  e riordinando

$$V(s) = \frac{q_0 R}{LC} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$V(s) = \frac{q_0 R}{LC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}$$

Quest'ultima espressione ben si presta a studiare i tre casi citati.

Caso 1.

Sia:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega^2 > 0.$$

In questo caso si ha una coppia di radici complesse coniugate. Possiamo riscrivere l'espressione di  $V(s)$ :

$$V(s) = \frac{q_0 R}{\omega LC} \cdot \frac{\omega}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \omega^2}$$

da cui antitrasformando si ottiene la risposta nel tempo:

$$V(t) = \frac{q_0 R}{\omega LC} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin \omega t$$

Si ottiene la tipica oscillazione smorzata.

Caso 2.

Sia:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega^2 = 0.$$

da cui, risolvendo, risulta:  $R^2 = 4L/C$ . In questo caso si hanno due radici reali coincidenti. Possiamo scrivere la corrispondente espressione di  $V(s)$ :

$$V(s) = \frac{q_0 R}{LC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2}$$

da cui antitrasformando si ottiene la risposta nel tempo:

$$V(t) = \frac{q_0 R}{LC} \cdot t \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$$

E' una risposta aperiodica, che parte da 0 per  $t = 0$ , raggiunge un massimo per  $t = 2L/R = \sqrt{LC}$  e torna asintoticamente a 0 all'infinito. Il valore di  $R$  calcolato sopra realizza lo smorzamento critico del circuito.

Caso 3.

Sia:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} < 0.$$

In questo caso si hanno due radici reali distinte negative. Indicate le due radici con  $-\alpha_1, -\alpha_2$  ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono numeri positivi), possiamo scrivere:

$$V(s) = \frac{q_0 R}{LC} \cdot \frac{1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$$

da cui antitrasformando

$$V(t) = \frac{q_0 R}{LC} \cdot \frac{e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

E' ancora una risposta aperiodica, che parte da 0 per  $t = 0$ , raggiunge un massimo per  $t > \sqrt{LC}$  e torna asintoticamente a 0 all'infinito. Quando  $R > 2\sqrt{L/C}$  si ha sovrasmorzamento del circuito.

### 3.6 Risposta di un circuito RC ad eccitazione sinusoidale

Negli esempi visti sinora abbiamo trattato il rilassamento dei circuiti, cioè il loro comportamento quando è presente una certa energia nei componenti con memoria: abbiamo visto che si instaura un transiente che dura fintantoché c'è energia nella rete; poi si raggiunge la quiete quando tutta l'energia è stata dissipata. Ora vediamo il comportamento di una rete quando viene applicata una forzante, cioè quando sul circuito opera un generatore esterno, quale può essere un generatore sinusoidale. Consideriamo il circuito di Fig. 3.11.

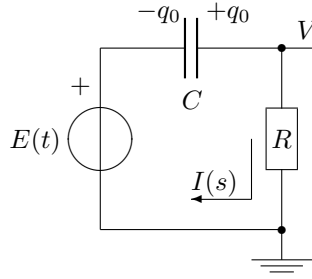


Fig. 3.11

Il generatore sinusoidale è:  $E(t) = E_0 \cdot \sin \omega_0 t$ , da cui:

$$E(s) = E_0 \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Scriviamo l'equazione della maglia:

$$-E(s) + V_C(s) + V_R(s) = 0$$

$$-E_0 \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{I(s)}{sC} + \frac{-q_0}{sC} + I(s)R = 0$$

$$I(s) \cdot \left( \frac{1}{sC} + R \right) = \frac{q_0}{sC} + E_0 \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$I(s) = \frac{sC}{1 + sRC} \left( \frac{q_0}{sC} + E_0 \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right)$$

da cui

$$V(s) = R \cdot I(s) = \frac{q_0}{C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} + E_0 CR \omega_0 \cdot \frac{s}{(1 + sRC)(s^2 + \omega_0^2)}$$

Possiamo considerare la composizione di  $V(s)$ :

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s)$$

dove

$$V_1(s) = \frac{q_0}{C} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$V_2(s) = E_0 CR \omega_0 \cdot \frac{s}{(1 + sRC)(s^2 + \omega_0^2)}$$

$V_1(s)$  rappresenta la risposta di rilassamento del circuito per effetto della carica  $q_0$  inizialmente presente sul condensatore. Antitrasformando, troviamo la risposta transiente:

$$V_1(t) = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

che si annulla dopo qualche costante di tempo  $RC$ .

La risposta  $V_2(s)$ , dovuta alla presenza della forzante, é piú complessa. Essa richiede qualche calcolo preliminare per effettuare la separazione delle frazioni.

$$V_2(s) = E_0 \omega_0 \cdot \frac{s}{(s + \alpha)(s^2 + \omega_0^2)}$$

con  $\alpha = 1/RC$ . La frazione a secondo membro deve essere suddivisa nella somma di due frazioni piú semplici con la procedura presentata nel capitolo 0.

$$\frac{s}{(s + \alpha)(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{A}{s + \alpha} + \frac{B \cdot s + D}{s^2 + \omega_0^2}$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$B = -A = \frac{\alpha}{\omega_0^2 + \alpha^2} \quad D = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \alpha^2}$$

$V_2(s)$  diviene:

$$V_2(s) = \frac{E_0 \omega_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} \left( -\alpha \cdot \frac{1}{s + \alpha} + \alpha \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \omega_0 \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right)$$

Antitrasformando si ottiene:

$$V_2(t) = \frac{E_0 \omega_0}{\omega_0^2 + \alpha^2} \left( -\alpha \cdot e^{-\alpha t} + \alpha \cdot \cos \omega_0 t + \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t \right).$$

Rielaborando l'espressione usando la seguente equivalenza trigonometrica

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} \cdot \sin \omega_0 t = \sin(\omega_0 t + \phi)$$

con

$$\phi = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 RC)^2 + 1}}$$

e sostituendo ad  $\alpha$  il suo valore si ottiene:

$$V_2(t) = -E_0 \frac{\omega_0 RC}{(\omega_0 RC)^2 + 1} \cdot e^{-t/RC} + E_0 \frac{\omega_0 RC}{\sqrt{(\omega_0 RC)^2 + 1}} \cdot \sin(\omega_0 t + \phi).$$

Si nota che la risposta alla forzante é composta di un termine transiente, necessario per l'assestamento della carica sul condensatore, legato allo sfasamento, e di un termine che dá il funzionamento a regime, quando i transienti sono terminati.

Nota - Normalmente quando si fanno i calcoli in corrente alternata si determina la risposta a regime trascurando i transienti.



### 3.7 Risposta di un circuito RL ad un impulso

Consideriamo il circuito di Fig. 3.12.

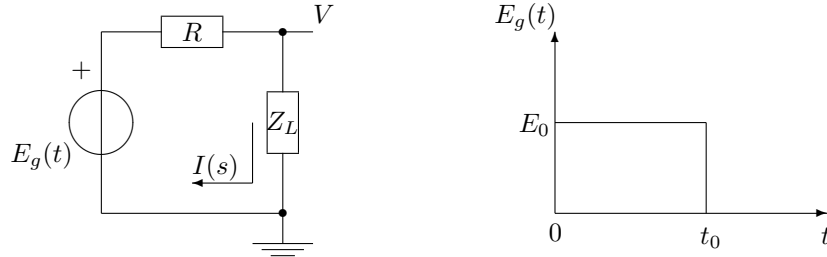


Fig. 3.12

Il generatore ideale di tensione  $E_g(t)$  applica un impulso di ampiezza costante  $E_0$  e di durata  $t_0$  alla serie costituita da un resistore e un induttore. Vogliamo calcolare il segnale  $V(t)$  ai capi dell'induttore. Inizialmente non vi sia flusso concatenato con l'induttore ( $Li_0 = 0$ ).

Il segnale del generatore é definito dall'espressione:

$$E_g(t) = E_0 \cdot [u(t) - u(t - t_0)]$$

Possiamo avvalerci del teorema della sovrapposizione per rappresentare l'eccitazione impulsiva come generata da due generatori ideali indipendenti,  $E_{g1}(t)$  e  $E_{g2}(t)$ , così definiti:

$$E_{g1}(t) = E_0 \cdot u(t)$$

$$E_{g2}(t) = -E_0 \cdot u(t - t_0)$$

e quindi

$$E_g(t) = E_{g1}(t) + E_{g2}(t)$$

Usando il teorema della sovrapposizione calcoliamo dapprima la risposta al generatore  $E_{g1}(t)$ , poi quella al generatore  $E_{g2}(t)$  ed infine sommiamo le due risposte.

Iniziamo col primo generatore:

$$E_{g1}(t) = E_0 \cdot u(t) \qquad L[E_0 \cdot u(t)] = E(s) = E_0/s.$$

Quindi il generatore applica un gradino di tensione di ampiezza  $E_0$ . Scriviamo l'equazione della maglia.

$$-E(s) + V_R(s) + V_L(s) = 0$$

$$-E_0/s + R \cdot I(s) + sL \cdot I(s) = 0$$

$$I(s) \cdot (R + sL) = E_0/s$$

$$I(s) = \frac{E_0}{s(R + sL)} = \frac{E_0}{L} \cdot \frac{1}{s(s + R/L)}$$

Procediamo alla separazione delle frazioni.

$$I(s) = \frac{E_0}{L} \cdot \left( \frac{A}{s} + \frac{B}{s + R/L} \right)$$

$$A(s + R/L) + Bs = 1 \qquad (A + B)s + A \cdot R/L = 1$$

$$A + B = 0 \qquad A = L/R \qquad B = -L/R$$

La soluzione diviene:

$$I(s) = \frac{E_0}{R} \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

Antitrasformando:

$$i_1(t) = \frac{E_0}{R} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

Quest'espressione di  $i_1(t)$  é sempre valida, anche dopo  $t = t_0$ .  
Calcoliamo ora  $V_L(t)$  nello stesso intervallo.

$$V_L(s) = sL \cdot I(s) = \frac{E_0}{s + R/L}$$

Quindi antitrasformando:

$$V_1(t) = V_L(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

Quest'espressione di  $V_1(t)$  é sempre valida, anche dopo  $t_0$ .

Passiamo ora a studiare il comportamento del circuito dopo  $t_0$ , quando il generatore  $E_{g2}(t)$  é operativo. Ovviamente, la risposta del circuito a questo secondo generatore é del tutto indipendente dalla presenza del primo generatore. Effettuiamo la seguente traslazione temporale:  $t - t_0 = t'$  con  $t' > 0$  e scriviamo l'equazione della maglia in questa nuova condizione.

$$E_{g2}(t) = -E_0 \cdot u(t - t_0) \qquad L[-E_0 \cdot u(t')] = E(s) = -E_0/s.$$

Quindi il generatore applica un gradino di tensione di ampiezza  $E_0$ , ma negativo. Scriviamo l'equazione della maglia.

$$\begin{aligned} -E(s) + V_R(s) + V_L(s) &= 0 \\ E_0/s + R \cdot I(s) + sL \cdot I(s) &= 0 \\ I(s) \cdot (R + sL) &= -E_0/s \\ I(s) &= -\frac{E_0}{s(R + sL)} = -\frac{E_0}{L} \cdot \frac{1}{s(s + R/L)} \end{aligned}$$

Procedendo alla separazione delle frazioni come nel caso precedente, la soluzione diviene:

$$I(s) = -\frac{E_0}{R} \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

Antitrasformando:

$$i_2(t') = -\frac{E_0}{R} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t'} \right)$$

Calcoliamo ora  $V_L(t)$  nello stesso intervallo.

$$V_L(s) = sL \cdot I(s) = -\frac{E_0}{s + R/L}$$

Quindi antitrasformando:

$$V_2(t') = V_L(t') = -E_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} t'}$$

Il comportamento complessivo si ottiene sommando le risposte calcolate separatamente nei due intervalli. Risulta:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) - \frac{E_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right) \cdot u(t-t_0)$$

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - E_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \cdot u(t-t_0)$$

Tracciamo ora l'andamento della  $i(t)$  e della  $V(t)$  in funzione del tempo (Fig. 3.13) per  $t_0 > \frac{L}{R}$ , cioè la costante di tempo  $L/R$  del circuito è piccola rispetto a  $t_0$ .

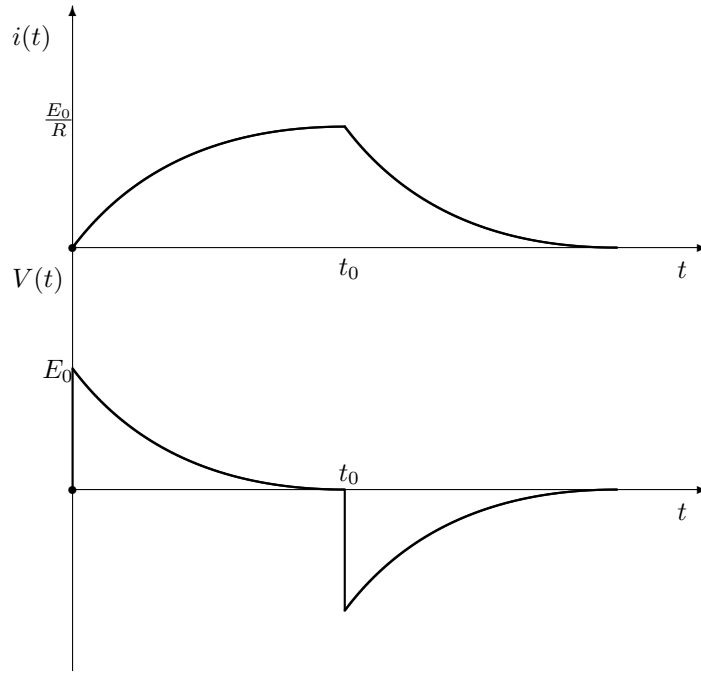


Fig. 3.13

Calcoliamo il bilancio energetico per  $t \geq t_0$ , sempre nella condizione  $t_0 > \frac{L}{R}$ . A  $t = t_0$  nell'induttore scorre una corrente  $i_0 = E_0/R$ . Pertanto nel flusso concatenato con l'induttore è presente un'energia pari a:

$$U_L = \frac{1}{2} L i_0^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{E_0}{R} \right)^2.$$

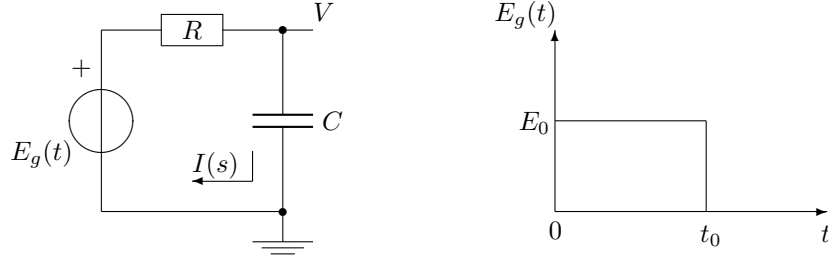
Calcoliamo l'energia dissipata in calore nel resistore R nell'intervallo  $t \geq t_0$ .

$$U_R = \int_0^\infty \frac{[V_2(t')]^2}{R} dt' = \frac{E_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2Rt'}{L}} dt' = \frac{E_0^2}{R} \frac{L}{2R} \int_0^\infty e^{-\frac{2Rt'}{L}} d\left(\frac{2Rt'}{L}\right) = \frac{1}{2} L \left( \frac{E_0}{R} \right)^2.$$

Il principio di conservazione dell'energia è rispettato.

### 3.8 Risposta di un circuito RC ad un impulso

Consideriamo il circuito di Fig. 3.14 che segue.



Il generatore ideale di tensione  $E_g(t)$  applica un impulso di ampiezza costante  $E_0$  e di durata  $t_0$  alla serie costituita da un resistore e un condensatore. Vogliamo calcolare il segnale  $V(t)$  ai capi del condensatore, inizialmente scarico. La costante di tempo  $RC$  sia piccola rispetto a  $t_0$ .

Il segnale del generatore é definito dall'espressione:

$$E_g(t) = E_0 \cdot [u(t) - u(t - t_0)]$$

Possiamo avvalerci del teorema della sovrapposizione per rappresentare l'eccitazione impulsiva come generata da due generatori ideali indipendenti,  $E_{g1}(t)$  e  $E_{g2}(t)$ , così definiti:

$$E_{g1}(t) = E_0 \cdot u(t)$$

$$E_{g2}(t) = -E_0 \cdot u(t - t_0)$$

e quindi

$$E_g(t) = E_{g1}(t) + E_{g2}(t)$$

Usando il teorema della sovrapposizione calcoliamo dapprima la risposta al generatore  $E_{g1}(t)$ , poi quella al generatore  $E_{g2}(t)$  ed infine sommiamo le due risposte.

Iniziamo col primo generatore:

$$E_{g1}(t) = E_0 \cdot u(t) \qquad L[E_0 \cdot u(t)] = E(s) = E_0/s.$$

Quindi il generatore applica un gradino di tensione di ampiezza  $E_0$ . Possiamo scrivere immediatamente l'espressione della corrente  $I(s)$  che circola nella maglia.

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} = \frac{E_0}{s} \frac{1}{R + 1/sC} = \frac{E_0}{R} \frac{1}{s + 1/RC}$$

$$V_C(s) = I(s) \cdot Z_C(s) = \frac{E_0}{R} \frac{1}{s + 1/RC} \frac{1}{sC} = \frac{E_0}{RC} \frac{1}{s(s + 1/RC)}$$

Procediamo alla separazione delle frazioni.

$$\frac{1}{s(s + 1/RC)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1/RC}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s + 1/RC)} = RC$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1/RC} (s + 1/RC) \frac{1}{s(s + 1/RC)} = -RC$$

L'espressione di  $V_C(s)$  diviene:

$$V_C(s) = E_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \right)$$

Antitrasformando si ha:

$$i_1(t) = \frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_1(t) = V_C(t) = E_0 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Queste espressioni sono valide anche dopo  $t_0$ .

Passiamo ora a studiare il comportamento del circuito dopo  $t_0$ , quando il generatore  $E_{g2}(t)$  é operativo. Ovviamente, la risposta del circuito a questo secondo generatore é del tutto indipendente dalla presenza del primo generatore. Effettuiamo la seguente traslazione temporale:  $t - t_0 = t'$  con  $t' > 0$  e scriviamo l'equazione della maglia in questa nuova condizione.

$$E_{g2}(t) = -E_0 \cdot u(t - t_0) \qquad L[-E_0 \cdot u(t')] = E(s) = -E_0/s.$$

Quindi il generatore applica un gradino di tensione di ampiezza  $E_0$ , ma negativo. Scriviamo l'espressione della corrente  $I(s)$ :

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} = -\frac{E_0}{s} \frac{1}{R + 1/sC} = -\frac{E_0}{R} \frac{1}{s + 1/RC}$$

$$V_C(s) = I(s) \cdot Z_C(s) = -\frac{E_0}{R} \frac{1}{s + 1/RC} \frac{1}{sC} = -\frac{E_0}{RC} \frac{1}{s(s + 1/RC)}$$

Effettuando la separazione delle frazioni e antitrasformando otteniamo:

$$i_2(t') = -\frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{t'}{RC}}$$

$$V_2(t') = V_C(t') = -E_0 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t'}{RC}} \right)$$

La risposta complessiva si ottiene sommando i contributi dei due intervalli:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{E_0}{R} e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} u(t - t_0)$$

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = E_0 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) - E_0 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} \right) u(t - t_0)$$

Tracciamo ora l'andamento della  $i(t)$  e della  $V(t)$  in funzione del tempo (Fig. 3.15), per  $t_0 > RC$ .

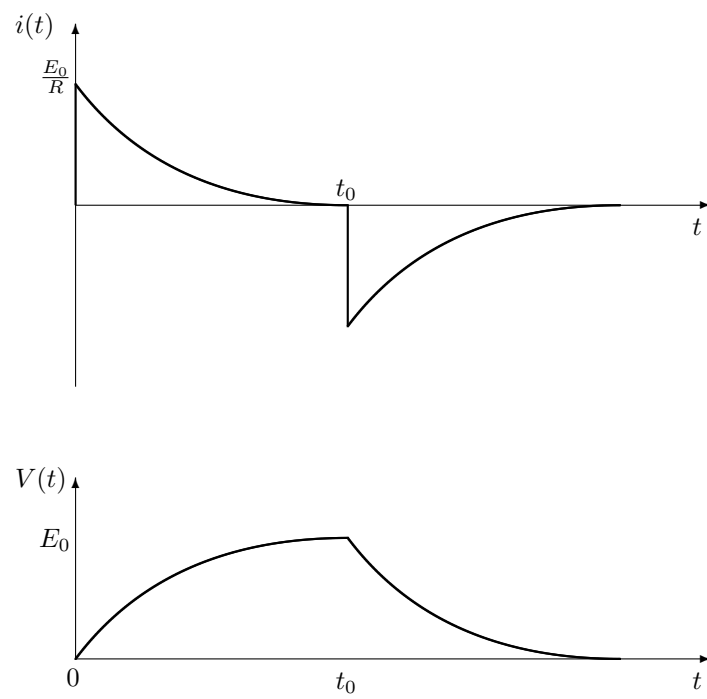


Fig. 3.15

## Capitolo 4

# Funzione di trasferimento

Iniziamo lo studio delle funzioni di trasferimento di reti fisicamente realizzabili. Nella maggioranza dei casi siamo interessati a studiare il comportamento di una rete elettrica, che riceve un segnale in ingresso e che produce un segnale in uscita: il segnale d'uscita é il risultato dell'elaborazione del segnale d'ingresso. Possiamo schematizzare una tale rete nel modo indicato in Fig. 4.1.

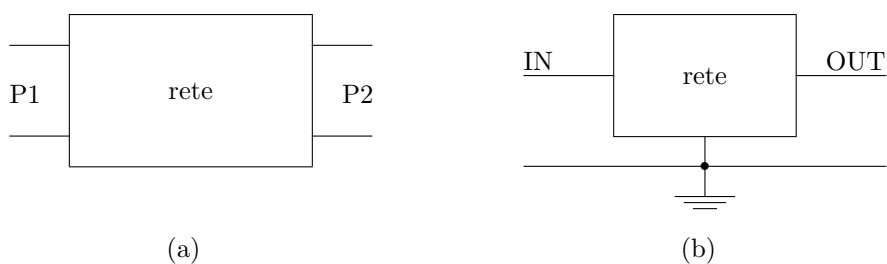


Fig. 4.1

In figura 4.1(a) é rappresentata genericamente una rete con due porte, P1 e P2. Nella figura 4.1(b) é data una rappresentazione particolare, che copre i casi a cui siamo piú interessati. Infatti in essa é rappresentato il nodo di riferimento, comune all'ingresso e all'uscita, e sono indicati l'ingresso IN e l'uscita OUT dei segnali (rete unilatera). Noi focalizzeremo la nostra attenzione proprio su questo tipo di reti. Le studieremo avvalendoci degli strumenti che la trasformata di Laplace ci mette a disposizione, e cioè faremo uso della teoria delle funzioni analitiche elementari.

Facciamo riferimento alla figura 4.2 che segue.

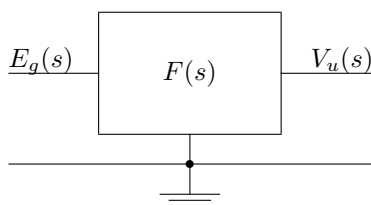


Fig. 4.2

Alla rete viene applicata un'eccitazione  $E_g(t)$ . La rete produce una risposta  $V_u(t)$ . Le trasformate di Laplace dell'eccitazione e della risposta sono rispettivamente  $E_g(s)$  e  $V_u(s)$ . La rete lega queste due

funzioni nel modo seguente:

$$V_u(s) = F(s) \cdot E_g(s).$$

$F(s)$  é detta **funzione di trasferimento** della rete. Essa viene calcolata operando nel dominio della frequenza complessa  $s$  e applicando i principi ed i teoremi già visti. Si passa quindi attraverso la scrittura di un sistema di equazioni lineari della rete, che viene risolto con le tecniche dei determinanti. In particolare, con riferimento alla scrittura delle equazioni delle maglie, il sistema é della forma

$$Z_m \cdot I = E$$

dove  $I$  é il vettore delle correnti incognite,  $E$  é il vettore dei generatori indipendenti,  $Z_m$  é la matrice impedenza della rete.  $Z_m$  é della forma  $Z_m = [c_{ij}]$ . I  $c_{ij}$  sono gli elementi della matrice, della forma

$$c_{ij} = \frac{1}{s} (L_{ij}s^2 + R_{ij}s + \frac{1}{C_{ij}})$$

essendo R,L,C i componenti passivi ideali della rete: R,L,C sono parametri costanti positivi. Gli elementi  $c_{ij}$  sono funzioni razionali. Poiché somme, prodotti, differenze e quozienti di funzioni razionali sono anch'essi funzioni razionali, e queste sono le sole operazioni che vengono fatte, vediamo che *le funzioni di trasferimento sono funzioni razionali*. Le funzioni razionali sono le più semplici funzioni analitiche.

Possiamo sintetizzare nel modo seguente quanto visto finora.

**Nel caso di sistemi lineari a parametri costanti positivi, a costanti concentrate (descritti da equazioni o sistemi di equazioni differenziali alle derivate ordinarie, lineari, a coefficienti costanti) la funzione di trasferimento risulta sempre essere il rapporto di due polinomi nel dominio della variabile  $s$  (frequenza complessa  $s = \alpha + j\omega$ )**

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

dove gli  $a_m, \dots, a_0, b_n, \dots, b_0$  sono tutti coefficienti reali e  $m \leq n$ .

## 4.1 Rappresentazione di $F(s)$ con poli e zeri

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che un polinomio di grado  $n$  ammette  $n$  radici.

Le radici del polinomio a numeratore di  $F(s)$  sono gli *zeri* di  $F(s)$ .

Le radici del polinomio a denominatore di  $F(s)$  sono i *poli* di  $F(s)$ .

Gli zeri e i poli di  $F(s)$  sono o reali o a coppie complesse coniugate, ed eventualmente possono avere una molteplicità  $r$  (ad es.,  $(s - z_j)^r$ ).

$F(s)$  é reale sull'asse reale: quindi  $F(s)$  é una funzione reale razionale. Di conseguenza risulta  $F(s^*) = F^*(s)$ : le funzioni della rete assumono valori coniugati su punti coniugati del piano complesso (proprietà di riflessione).

Alla luce di tutto questo la  $F(s)$  può essere scritta nel seguente modo:

$$F(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

essendo  $k = a_m/b_n$  e  $m \leq n$ .

Si può specificare completamente una  $F(s)$  assegnando gli  $n$  poli  $p_i$ , gli  $m$  zeri  $z_j$  e il fattore di scala  $k$ . Si può dare una rappresentazione diagrammatica di  $F(s)$  sul piano complesso tracciando la costellazione dei poli e degli zeri (Fig. 4.3). I circoletti rappresentano gli zeri della funzione, i dischetti neri ne rappresentano i poli. Per la proprietà di riflessione della  $F(s)$  i poli e gli zeri della funzione o sono situati sull'asse reale oppure appaiono in coppie complesse coniugate.



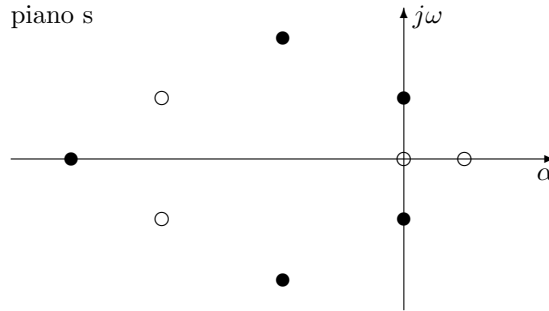


Fig. 4.3

Vediamo un semplice esempio di deduzione della  $F(s)$  data la costellazione dei poli e zeri (Fig. 4.4) .

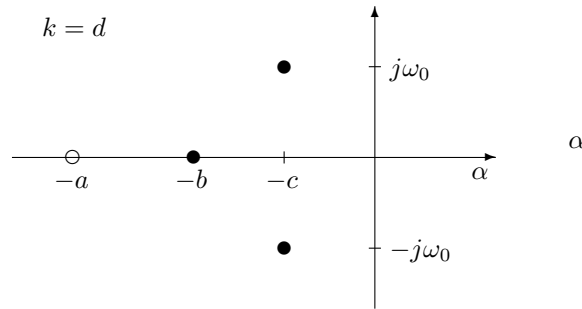


Fig. 4.4

Scriviamo l'espressione di  $F(s)$  derivata dalla figura 4.4:

$$F(s) = d \frac{s + a}{(s + b)((s + c)^2 + \omega_0^2)}$$

Analizziamo la composizione del denominatore di  $F(s)$ . Vediamo che in esso compaiono o poli sull'asse reale oppure coppie di poli complessi coniugati. Non vi sono altre alternative. Con la tecnica della separazione delle frazioni possiamo isolare i singoli poli semplici e le singole coppie di poli complessi coniugati, cioè  $F(s)$  può essere rappresentata come la somma algebrica di tanti poli o semplici o complessi coniugati. Prendiamo ad esempio la  $F(s)$  che abbiamo derivato dalla costellazione di poli e zeri di figura 4.4. Se effettuiamo la separazione delle frazioni otteniamo:

$$F(s) = d \left( \frac{A}{s + b} + \frac{Bs + C}{(s + c)^2 + \omega_0^2} \right)$$

Dovremmo ora determinare gli A, B, C. Ma questo non ci interessa. Ci interessa invece sottolineare che la risposta della rete ad un'eccitazione impulsiva del tipo delta di Dirac è ottenibile come somma di tanti componenti, ottenuti ognuno antitrasformando l'espressione di ogni polo singolo o di ogni coppia di poli complessi coniugati. Antitrasformando le espressioni dei poli suddetti otteniamo:

$$L^{-1} \left[ \frac{h}{(s - p_i)^k} \right] = h t^{k-1} e^{p_i t}$$

E' evidente che se il polo  $p_i$  é negativo l'esponenziale a secondo membro tende ad annullarsi nel tempo e il segnale sparisce. Se  $p_i$  fosse positivo la funzione divergerebbe e non avremmo stabilit .

$$L^{-1} \left[ \frac{l}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} \right] = l e^{\alpha t} \cos \omega_0 t$$

Analogamente, se la parte reale del polo  $\alpha$  é negativo l'esponenziale a secondo membro tende ad annullarsi nel tempo e il segnale sparisce.

**Quindi la condizione necessaria per  che la rete sia stabile   che i poli reali e la parte reale  $\alpha$  dei poli complessi coniugati della funzione di trasferimento della rete siano posizionati sul semiasse reale negativo del piano  $s$ .**

Aggiungiamo un'ultima considerazione. Le espressioni dei poli sono del tipo:

$$\frac{1}{s + b} \qquad \frac{1}{(s + c)^2 + \omega_0^2}.$$

Vediamo che se  $\omega_0 = 0$  la seconda espressione si riduce alla prima. Se  $c = 0$  la seconda espressione diviene la trasformata di una sinusoidale. Allora si pu  dire che

$$\frac{1}{(s + c)^2 + \omega_0^2}$$

  l'espressione pi  generale di un polo, a cui antitrasformando corrisponde la funzione del tempo

$$e^{-ct} \cos \omega_0 t,$$

che viene chiamata *sinusoide generalizzata*. Pertanto **la risposta di una rete ad una delta di Dirac   una somma di sinusoidi generalizzate**.

## 4.2 Analisi della risposta in frequenza

Un segnale applicato ad una rete pu  essere pensato come una serie di successive delta di Dirac, ciascuna delle quali d  origine a sinusoidi generalizzate. Il segnale d'uscita   la sovrapposizione di tutte queste sinusoidi generalizzate. Pertanto per analizzare come sar  il segnale d'uscita ci interessa conoscere il comportamento della rete in regime sinusoidale.

Il comportamento di  $F(s)$  in regime sinusoidale puro si pu  ottenere studiando  $F(s)$  sull'asse immaginario. Infatti il luogo dei generatori sinusoidali   l'asse  $j\omega$  del piano della variabile complessa  $s$ : ogni coppia di poli complessi coniugati sull'asse  $j\omega$    un generatore sinusoidale. Per studiare la funzione di trasferimento sull'asse  $j\omega$  occorre porre  $s = j\omega$ . Pertanto:  $F(s) \rightarrow F(j\omega)$ .

Ad un'eccitazione sinusoidale corrisponde una risposta sinusoidale della stessa frequenza, di ampiezza moltiplicata per il modulo di  $F(j\omega)$  e di sfasamento fornito dall'argomento di  $F(j\omega)$ .

Basta ricordare che:

$$\begin{aligned} R &\rightarrow R \\ sL &\rightarrow j\omega L \\ \frac{1}{sC} &\rightarrow \frac{1}{j\omega C} \end{aligned}$$

Possiamo scrivere:

$$F(j\omega) = U(\omega) + jX(\omega) = |F(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

Le parti reale e immaginaria di  $F(j\omega)$  sono:

$$U(\omega) = \frac{1}{2}[F(j\omega) + F(-j\omega)]$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} [F(j\omega) - F(-j\omega)]$$

Ricordiamo che  $F(s^*) = F^*(s)$  perché  $F(s)$  é reale. Segue che:  $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ . Possiamo allora scrivere:

$$F^2(j\omega) = F(j\omega) F(-j\omega) \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} = |F(j\omega)|^2 e^{2j\phi(\omega)}$$

da cui

$$|F(j\omega)|^2 = F(j\omega) F(-j\omega)$$

$$j\phi(\omega) = \frac{1}{2} \ln \frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)}$$

Per valori di  $s$  limitati all'asse  $j\omega$  la  $F(s)$  assume la seguente forma:

$$\frac{F(j\omega)}{k} = \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}$$

Possiamo graficare queste espressioni in funzione di  $\omega$  per vederne l'andamento.

Per ottenere il modulo di  $F(j\omega)$  per ogni valore di  $\omega$  calcoliamo il modulo di ciascuno dei termini di zero e di polo, poi dividiamo il prodotto dei moduli dei termini di zero per il prodotto dei moduli dei termini di polo. Analogamente, l'angolo di sfasamento di  $F(j\omega)$  per ogni valore di  $\omega$  si calcola sommando gli angoli dei termini di zero e sottraendo la somma degli angoli dei termini di polo.

Graficamente la procedura é semplice. Facciamo riferimento alla figura 4.5 che segue.

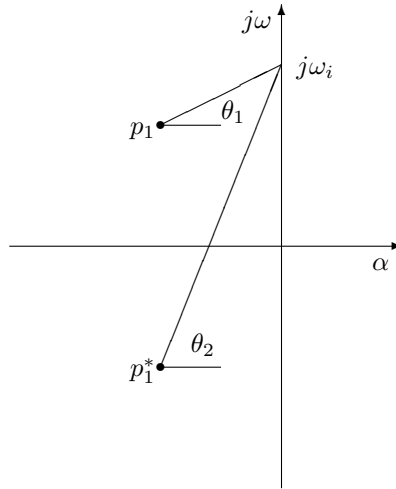


Fig. 4.5

Il modulo del termine di polo  $p_1$  é la lunghezza del segmento fra  $p_1$  e  $j\omega_i$ ; il suo angolo é indicato con  $\theta_1$ . Simile discussione si applica a  $p_1^*$ .

### 4.3 Rappresentazione con i diagrammi di Bode

Consideriamo una rappresentazione di  $F(s)$  molto potente ed ingegnosa, dovuta a Bode. Essa é divenuta lo standard per la rappresentazione grafica dell'andamento della funzione di trasferimento con la frequenza. Partiamo dall'uso della forma esponenziale per la rappresentazione dei numeri complessi. Scriviamo:

$$F(j\omega) = e^{\alpha(\omega) + j\phi(\omega)}.$$

Applicando i logaritmi e sviluppando i calcoli possiamo scrivere:

$$\ln F(j\omega) = \alpha(\omega) + j\phi(\omega)$$

$$\alpha(\omega) = \ln |F(j\omega)| = \frac{1}{2} \ln [F(j\omega)F(-j\omega)]$$

$\alpha(\omega)$  é chiamato *guadagno logaritmico* o semplicemente *guadagno*. La sua unità di misura é il *neper*. In alternativa possiamo definire una nuova quantità  $\alpha'(\omega)$ , tale che:

$$|F(j\omega)| = 10^{\alpha'/20}$$

$$\alpha'(\omega) = 20 \cdot \log_{10} |F(j\omega)|$$

$\alpha'$  e  $\alpha$  sono chiamate con lo stesso nome. L'unità di misura di  $\alpha'$  é il *decibel*, contratto in *db*. Poiché  $\alpha'$  e  $\alpha$  differiscono per un fattore costante, nella pratica elettronica é invalso l'uso della notazione  $\alpha$  al posto di  $\alpha'$ , aggiungendo che il guadagno logaritmico é "misurato in db".

Consideriamo ora la variabile *frequenza*. Premettiamo che nella letteratura tecnica in inglese si usa il termine *frequenza* sia per indicare la frequenza ( $f$  o  $\nu$ ) propriamente detta, sia per indicare la pulsazione angolare  $\omega (= 2\pi\nu)$ , poiché hanno la stessa dimensione  $[t^{-1}]$  e differiscono per un fattore costante. Anche noi useremo la consuetudine inglese, fermo restando che dal contesto risulta evidente se ci si riferisce alla frequenza o alla pulsazione angolare.

Scriviamo:

$$u = \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \log_{10} \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

A  $u$  diamo il nome di *frequenza logaritmica*. Notiamo che se  $\omega_2/\omega_1 = 10$  allora  $u = 1$ . L'unità di misura di  $u$  é la *decade di frequenza*, contratta in *decade*, poiché corrisponde ad un intervallo di frequenze di una decade.

Riprendiamo la nostra funzione di trasferimento  $F(j\omega)$  e scriviamone il logaritmo, ricordando che essa ha la dimensione di un numero puro. Otteniamo:

$$\ln F(j\omega) = \ln k + \sum_{i=1}^m \ln(j\omega - z_i) - \sum_{h=0}^n \ln(j\omega - p_h)$$

e quindi

$$\alpha(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| = 20 \log_{10} k + \sum_{i=1}^m 20 \log_{10} |j\omega - z_i| - \sum_{h=0}^n 20 \log_{10} |j\omega - p_h|$$

$$\phi(\omega) = \arg k + \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - z_i) - \sum_{h=0}^n \arg(j\omega - p_h)$$

Come si vede, moltiplicazioni e divisioni sono state ricondotte a somme e sottrazioni. Di piú, poli e zeri vengono trattati singolarmente e i loro contributi vengono poi sommati o sottratti.

#### 4.3.1 Contributo di uno zero reale alla risposta in frequenza di $F(j\omega)$

Si abbia la seguente funzione di trasferimento, caratterizzata da uno zero reale:

$$F(s) = \frac{s + a}{a}$$

con  $a$  reale positivo. Lo zero é posizionato sull'asse reale del piano complesso  $s$  a  $s = -a$ . Sull'asse immaginario essa diviene:

$$F(j\omega) = \frac{j\omega + a}{a}.$$

Scriviamo l'espressione del guadagno logaritmico:

$$\alpha(\omega) = 20 \log_{10} |j\omega + a| - 20 \log_{10} a$$

Calcoliamo gli asintoti di  $\alpha(\omega)$ .

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{per } \omega = 0 \quad & \alpha(0) = 20 \log a - 20 \log a = 0 \\ \text{per } \omega \ll a \quad & \alpha(\omega) \approx 20 \log a - 20 \log a \approx 0 \\ \text{per } \omega \gg a \quad & \alpha(\omega) = 20 \log \omega - 20 \log a = 20 u - 20 \log a \end{aligned}$$

Mettiamo in grafico queste relazioni.

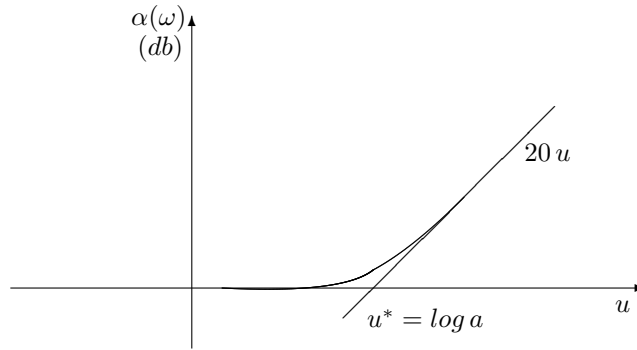


Fig. 4.6

Per  $\omega = 0$  abbiamo l'asintoto orizzontale, posizionato a  $\alpha = 0$ .

Per  $\omega \gg a$  abbiamo l'asintoto inclinato con pendenza  $20 u$ , cioè a  $20 \text{ db/decade}$ .

I due asintoti si incrociano quando  $20 \log a - 20 \log a = 20 u^* - 20 \log a = 0$ , cioè quando  $u^* = \log a$ , ovvero  $\omega_c = a$  avendo preso  $\omega_0 = 1$ ,  $\log \omega_c / \omega_0 = \log a$ .

Calcoliamo l'ordinata a  $\omega_c$ , cioè a  $u^*$ .

$$\alpha(a) = 20 \log \sqrt{a^2 + \omega_c^2} - 20 \log a = 20 \log \sqrt{2a^2} - 20 \log a = 20 \log a + 10 \log 2 - 20 \log a$$

$$\alpha(a = \omega_c) = +3 \text{ db}$$

Ecco allora che é semplice tracciare la curva che dá l'andamento della funzione  $\alpha(\omega)$ : in corrispondenza dell'incrocio dei due asintoti si segna il punto che si trova a  $+3 \text{ db}$  sopra l'intersezione: da quel punto la curva si raccorda agli asintoti.

Dall'esame del grafico di figura 4.6 si desume che prima di  $\omega_c$  lo zero contribuisce al guadagno con un contributo circa costante e uguale a 0, mentre oltre  $\omega_c$  lo zero incrementa il guadagno con  $20 \text{ db/decade}$ .

### 4.3.2 Contributo di un polo reale alla risposta in frequenza di $F(j\omega)$

Si abbia la seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{a}{s + a}$$

con  $a$  reale positivo.

Sull'asse immaginario  $j\omega$  essa diviene:

$$F(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a}.$$

Scriviamo l'espressione del guadagno logaritmico:

$$\alpha(\omega) = 20 \log a - 20 \log |j\omega + a|$$

Calcoliamo gli asintoti di  $\alpha(\omega)$ .

Per  $\omega = 0$ ,  $\alpha(\omega) = 20 \log a - 20 \log a = 0$ . Per  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\alpha(\omega) = 20 \log a - 20 \log \omega = 20 \log a - 20 u$ .

I due asintoti si incrociano quando  $20 \log a - 20 \log \omega_c = 0$  cioè per  $\omega_c = a$ .

Calcoliamo l'ordinata a  $\omega_c$ , ovvero in corrispondenza di  $u^*$ .

$$\alpha(\omega_c) = 20 \log a - 20 \log \sqrt{\omega_c^2 + a^2} = 20 \log a - 20 \log \sqrt{2a^2} = 20 \log a - 20 \log a - 10 \log 2 = -3 \text{ db}$$

Tracciamo il grafico di  $\alpha(\omega)$ .

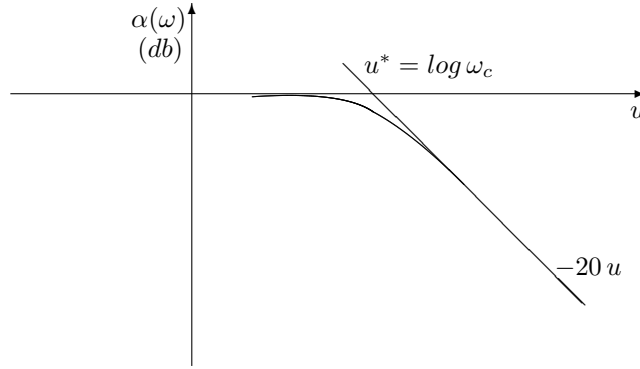


Fig. 4.7

Dall'esame del grafico di figura 4.7 si desume che prima di  $\omega_c$  il polo contribuisce al guadagno con un contributo circa costante, mentre oltre  $\omega_c$  il polo attenua il guadagno con  $-20 \text{ db/decade}$ .

L'aspetto della curva indica che la  $F(s)$  data è la funzione di trasferimento di un semplice filtro passa-basso, che lascia passare pressoché inalterate le frequenze minori di  $\omega_c$  (frequenza di taglio) e attenua le alte frequenze oltre  $\omega_c$  con un pendenza di  $-20 \text{ db/decade}$ .

### 4.3.3 Contributo di una coppia di poli complessi coniugati

Studiamo la seguente forma quadratica

$$\frac{c}{s^2 + as + b}.$$

con  $a$  e  $b$  e  $c$  reali positivi. Essa presenta una coppia di poli complessi coniugati quando vale la seguente condizione:  $a^2 < 4b$ .

Scriviamo il guadagno logaritmico del termine ottenuto sostituendo  $s$  con  $j\omega$ .

$$\alpha_i(\omega) = 20 \log c - 20 \log |-\omega^2 + j a \omega + b| = 20 \log c - 20 \log |j a \omega + b - \omega^2|$$

Calcoliamo gli asintoti di  $\alpha_i(\omega)$ .

Per  $\omega = 0$ ,  $\alpha(0) = 20 \log c - 20 \log b$ .

Per  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\alpha(\omega) = 20 \log c - 40 \log \omega$ .

Calcoliamo l'intersezione degli asintoti:

$$-20 \log b = -40 \log \omega_c$$

da cui:  $\omega_c = \sqrt{b}$ .

Calcoliamo l'ordinata a  $\omega_c$ :

$$\alpha(\omega_c) = 20 \log c - 20 \log |ja\omega_c + b - \omega_c^2| = 20 \log c - 20 \log |ja\sqrt{b}| = 20 \log c - 20 \log (a\sqrt{b})$$

che con semplici manipolazioni può essere riscritta nel seguente modo:

$$\alpha(\omega_c) = 20 \log c - 20 \log b - 20 \log \frac{a}{\sqrt{b}} = 20 \log c - 20 \log b + \Delta\alpha$$

con:  $\Delta\alpha = -20 \log \frac{a}{\sqrt{b}}$ .  $\Delta\alpha$  misura il discostamento della curva  $\alpha(\omega)$  dall'incrocio degli asintoti, cioè in  $u^* = \log \omega_c$ .

Valutiamo come varia  $\Delta\alpha$  al variare di  $a$  rispetto a  $b$ , con la condizione:  $a < 2\sqrt{b}$ . Se vale  $\sqrt{b} < a < 2\sqrt{b}$ , allora la curva passa al di sotto dell'incrocio degli asintoti:  $\Delta\alpha$  è negativo e varia fra -6db e 0db. Quando  $\sqrt{b} = a$  la curva passa per l'incrocio degli asintoti. Quando  $a < \sqrt{b}$  allora  $\Delta\alpha$  cambia segno e la curva passa tutta al di sopra degli asintoti, mostrando un picco positivo per  $u^*$ : questo è il picco di risonanza, che è tanto più alto quanto più piccolo è  $a$  rispetto a  $\sqrt{b}$ . Vediamo questi comportamenti in figura 4.8.

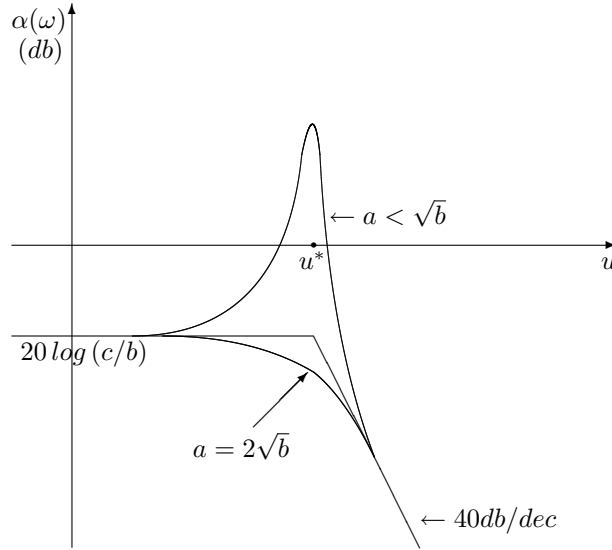


Fig. 4.8

Dalla figura 4.8 si deduce che una coppia di poli complessi coniugati si comporta come un filtro, che attenua con pendenza di  $-40\text{db/decade}$  le frequenze maggiori della frequenza di taglio  $\omega_c$ , fa passare le frequenze minori della  $\omega_c$  moltiplicandole per  $c/b$ , mentre in un intorno di  $\omega_c$  amplifica selettivamente le frequenze, in corrispondenza della propria risonanza. Si noti che la risonanza è tanto maggiore quanto più piccolo è  $a$ , cioè quanto più la coppia di poli complessi coniugati è vicina all'asse immaginario.

## 4.4 Note conclusive

L'idea, sviluppata da Bode, di utilizzare una rappresentazione logaritmica della  $F(j\omega)$  si è rivelata molto potente. Infatti essa consente di studiare individualmente il comportamento dei poli e degli zeri di

una funzione di trasferimento in regime sinusoidale. Il comportamento complessivo della funzione viene ottenuto raccordando i singoli comportamenti. Quindi é abbastanza semplice disegnare il diagramma della risposta della rete con la frequenza quando poli e zeri sono fra loro separati di almeno una decade di frequenza.

I diagrammi di Bode hanno avuto ovviamente un grande successo in tempi in cui i calcolatori non esistevano e si facevano i conti con il regolo calcolatore. Oggi abbiamo i calcolatori elettronici e sofisticati software di analisi del comportamento delle reti. Pertanto ora é facile ottenere il grafico della risposta precisa di una rete con la frequenza. Ma, si noti, questi software forniscono la risposta anche in forma di diagrammi di Bode! E questo avviene sia per una tradizione diffusa dell'uso dei diagrammi di Bode, sia perché, usando la rappresentazione logaritmica con le decadi di frequenza sulle ascisse, si ha un pari dettaglio della risposta su tutte le decadi.

## 4.5 Effetto del caricamento

Premettiamo alcune considerazioni sull'effetto del caricamento di una rete, cioè della connessione di un carico ad una rete.

Consideriamo la rete RC schematizzata in figura 4.9.

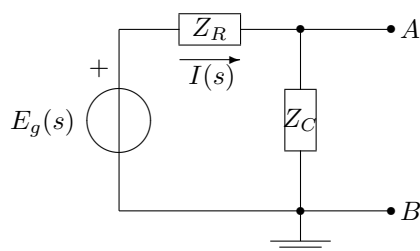


Fig. 4.9

Calcoliamo la tensione ai morsetti  $AB$ . Inizialmente sia  $q_C = 0$ .

$$V_{AB}(s) = \frac{E_g(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} \cdot Z_C(s)$$

$$V_{AB}(s) = E_g(s) \cdot \frac{1/sC}{R + 1/sC} = E_g(s) \cdot \frac{1}{sRC + 1}$$

### Caso 1.

Nella figura 4.10 é disegnata la rete di figura 4.9 con l'aggiunta del carico  $Z$ .

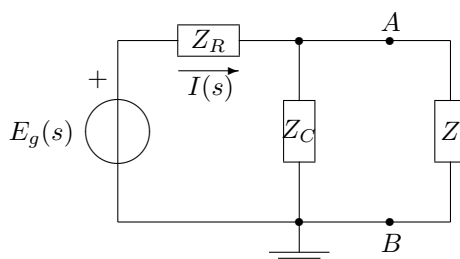


Fig. 4.10



Calcoliamo la tensione ai morsetti  $AB$ , cioè ai capi del carico  $Z$ . Innanzitutto calcoliamo l'impedenza vista dal generatore:

$$Z_{eq}(s) = Z_R(s) + (Z_C(s) \parallel Z(s)) = R + \left( \frac{1}{sC} \parallel Z \right)$$

$$I(s) = \frac{E_g(s)}{Z_{eq}(s)}$$

$$V'_{AB} = I(s) \cdot \left( \frac{1}{sC} \parallel Z \right) = \frac{E_g(s)}{R + \frac{1}{sC} \parallel Z} \cdot \left( \frac{1}{sC} \parallel Z \right)$$

Come é evidente,  $V'_{AB} \neq V_{AB}$ .

### Caso 2.

Nella figura 4.11 é disegnata la rete di figura 4.10 con l'interposizione di un "buffer" prima del carico  $Z$ . (Il buffer é un generatore ideale di tensione comandato di tensione con  $k = 1$ .)

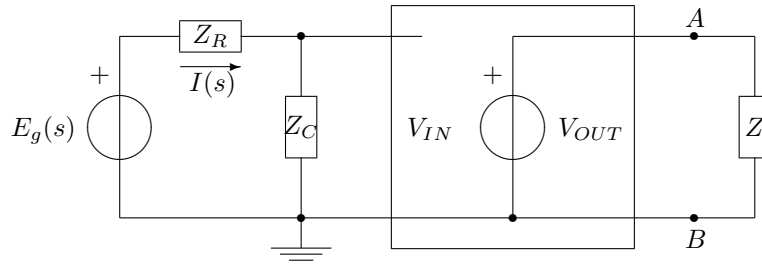


Fig. 4.11

essendo  $V_{OUT} = k \cdot V_{IN} = V_{IN}$ . Allora:

$$V''_{AB} = V_{OUT} = V_{IN} = E_g(s) \cdot \frac{1}{sRC + 1}$$

indipendentemente dalla presenza del carico  $Z$ .  $V''_{AB}$  coincide con il  $V_{AB}$  iniziale o "a vuoto". In questo ultimo caso, guardando dai morsetti  $AB$  si può ben scrivere che:

$$F(s) = \frac{1}{sRC + 1}.$$

**E' essenziale che una rete esca con un generatore ideale di tensione in modo che la risposta della rete non possa essere modificata dalla presenza di un carico, qualunque esso sia, o dalla variabilità del carico.**

## 4.6 Rete RC passa-basso

Consideriamo il circuito di figura 4.12 e studiamone classicamente il comportamento in regime sinusoidale.

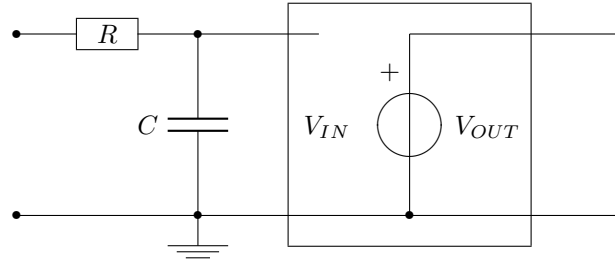


Fig. 4.12

Scriviamone la funzione di trasferimento con la condizione  $V_{OUT} = V_{IN}$ .

$$F(s) = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

e posto  $1/RC = a$

$$F(s) = \frac{a}{s + a}$$

Abbiamo già studiato questa funzione di trasferimento nella sezione 4.3.2. Vogliamo qui rivisitarla in funzione della frequenza, mettendo in evidenza altre particolarità.

Sull'asse dell'immaginario abbiamo:

$$F(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a} \quad |F(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

Poniamo su un grafico cartesiano  $|F(j\omega)|$  versus  $\omega$ .

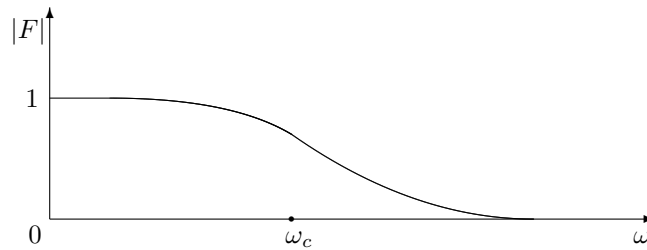


Fig. 4.13

Da questo grafico si ottiene il diagramma di Bode prendendo il logaritmo delle ordinate e sulle ascisse prendendo  $u = \log \omega / \omega_0$  con  $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$ .

E' definita *banda passante* l'intervallo di frequenze in cui la potenza del segnale trasmesso é compresa fra  $P_{max}$  e  $0.5 P_{max}$ . Possiamo scrivere:

$$P \sim (V)^2 \quad P/2 \sim 0.5(V)^2 \sim (V/\sqrt{2})^2 \quad 1/\sqrt{2} = 0.707$$

Segue che:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_c^2}} = 1/\sqrt{2} \quad \frac{a^2}{a^2 + \omega_c^2} = \frac{1}{2} \quad \omega_c^2 = a^2$$

perció  $\omega_c = a = 1/RC$ , da cui  $\nu_c = 1/2\pi RC$ . Quindi la banda passante é compresa fra 0 e  $\nu_c$  Hz. E' giustificato il nome di passa-basso dato alla rete suddetta.

Calcoliamo ora lo sfasamento introdotto. Scriviamo:

$$F(j\omega) = \frac{a}{a + j\omega} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} \cdot (a - j\omega)$$

Segue che:

$$\phi(\omega) = \arctg\left(\frac{-\omega}{a}\right)$$

da cui, per  $\omega = \omega_c$ ,  $\phi(\omega_c) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

L'andamento dello sfasamento è illustrato in figura 4.14.

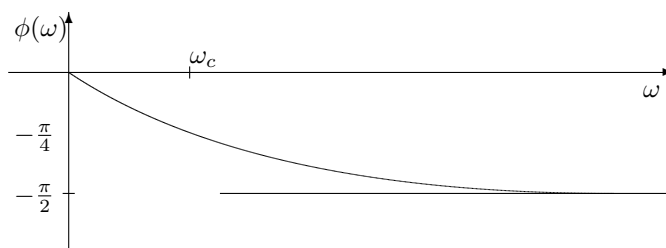


Fig. 4.14

## 4.7 Rete RC passa-alto

Consideriamo il circuito di figura 4.15 e studiamone classicamente il comportamento in regime sinusoidale.

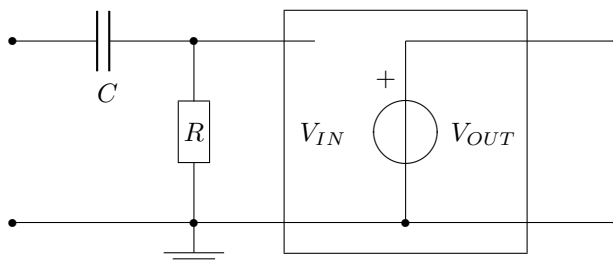


Fig. 4.15

Scriviamone la funzione di trasferimento con la condizione  $V_{OUT} = V_{IN}$ .

$$F(s) = \frac{Z_R(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} = \frac{sRC}{sRC + 1} = \frac{s}{s + 1/RC}$$

e ponendo  $a = 1/RC$

$$F(s) = \frac{s}{s + a}$$

Studiamo questa funzione sull'asse immaginario, quindi ponendo  $s = j\omega$ :

$$F(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + a} \quad |F(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

Poniamo su un grafico cartesiano  $|F(j\omega)|$  versus  $\omega$ .

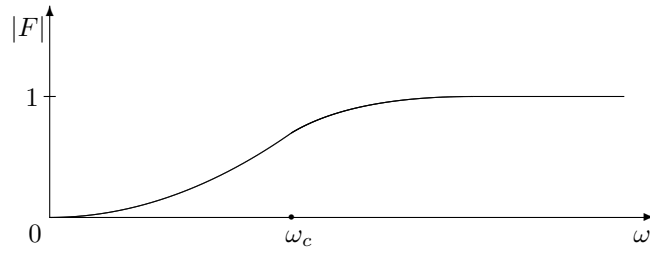


Fig. 4.16

Da questo grafico si ottiene il diagramma di Bode prendendo il logaritmo delle ordinate e sulle ascisse prendendo  $u = \log \omega / \omega_0$  con  $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$ .

Calcoliamo la banda passante. Innanzitutto determiniamo la frequenza di taglio  $\omega_c$ :

$$\frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 2\omega_c^2 = \omega_c^2 + a^2$$

perciò  $\omega_c = a = 1/RC$ , da cui  $\nu_c = 1/2\pi RC$ . Quindi la banda passante inizia da  $\nu_c$  Hz e si estende all'infinito. E' giustificato il nome di passa-alto dato alla rete suddetta.

Calcoliamo ora lo sfasamento introdotto. Scriviamo:

$$F(j\omega) = \frac{j\omega}{a + j\omega} = \frac{j\omega}{a^2 + \omega^2} \cdot (a - j\omega) = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \cdot (ja + \omega)$$

Segue che:

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{a}{\omega} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega}{a}$$

da cui, per  $\omega = \omega_c$ ,  $\phi(\omega_c) = \frac{\pi}{4}$ .

L'andamento dello sfasamento è illustrato in figura 4.17.

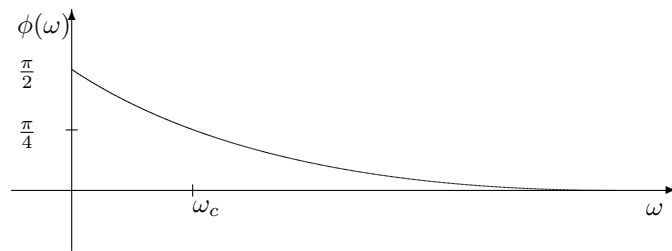


Fig. 4.17

## 4.8 Rete RC-CR

Come ultimo esempio studiamo la rete illustrata in figura 4.18, che vede due celle RC CR in cascata, per ricavarne il diagramma di Bode.

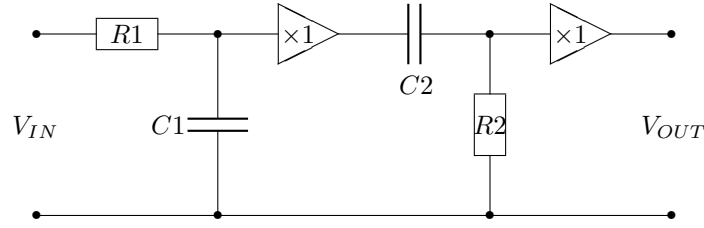
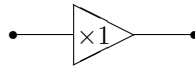


Fig. 4.18

Nota - Il simbolo



sta per un generatore ideale di tensione comandato di tensione con guadagno  $k=1$ .

Scriviamo la funzione di trasferimento della rete di figura 4.18.

$$F(s) = \frac{\frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{sR_1C_1 + 1} \frac{sR_2C_2}{sR_2C_2 + 1}$$

$$F(s) = \frac{1}{R_1C_1} \frac{1}{s + 1/R_1C_1} \frac{s}{s + 1/R_2C_2}$$

Ponendo  $a = 1/R_1C_1$ ,  $b = 1/R_2C_2$  possiamo scrivere:

$$F(s) = \frac{a}{s + a} \frac{s}{s + b}$$

$F(s)$  possiede: uno zero in  $\omega = 0$ ; un polo in  $\omega = a$  e un polo in  $\omega = b$ . Inoltre, sia  $a > b$ . Disegniamo il diagramma di Bode di  $F(s)$  (Fig. 4.19).

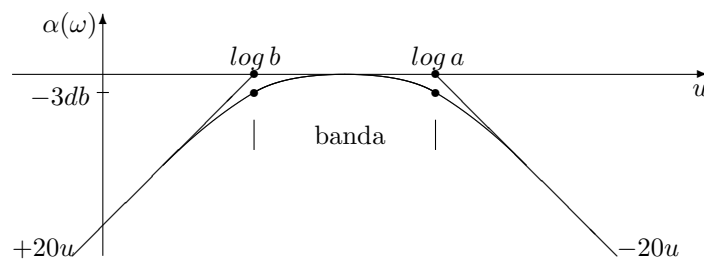


Fig. 4.19

Lo zero é localizzato in  $(u = -\infty; \alpha(\omega) = -\infty)$ . L'asintoto sale con pendenza  $+20u$  fino ad incontrare l'asse  $u$  in  $u = \log b$  (polo per  $\omega = b$ ). L'altro asintoto prosegue orizzontale ( $+20u - 20u = 0$ ) fino ad incontrare il polo  $u = \log a$ . Il terzo asintoto incrocia il secondo in  $\log a$  e scende con pendenza  $-20u$ . Raccordando i due punti a  $-3db$  con gli asintoti si ottiene l'andamento della  $\alpha(\omega)$ .  $F(s)$  é quindi la funzione di trasferimento di un filtro passa-banda, con banda passante compresa fra  $\omega = b$  e  $\omega = a$ . Fuori dalla banda passante il filtro attenua con pendenza di  $-20db/decade$ .



## Parte II

# I componenti a semiconduttore





## Capitolo 5

# Il diodo

Il diodo é un componente molto interessante che, come vedremo, é alla base di molti impieghi. Pertanto cominciamo col definirne un modello ideale. Il diodo ideale é un componente unilatero, che conduce corrente in una sola direzione. Nella figura 5.1 che segue diamo la caratteristica di un diodo ideale e il suo simbolo.

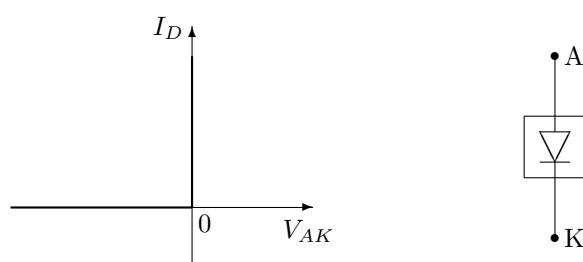


Fig. 5.1

Nel diodo ideale la corrente positiva scorre dall'anodo A al catodo K senza caduta di tensione ai capi del diodo stesso. La corrente non può scorrere dal catodo all'anodo, quindi il diodo sopporta una differenza di potenziale negativa fra anodo e catodo, senza passaggio di corrente. Questi fatti sono ben rappresentati in figura 5.1, ove i tratti in grassetto delineano la caratteristica di funzionamento del diodo ideale.

Ovviamente, il diodo ideale é un'astrazione. Ciò che abbiamo a disposizione é un diodo reale. I diodi reali più diffusi sono realizzati sfruttando le caratteristiche dei semiconduttori di Silicio: in sostanza utilizzando le caratteristiche fisiche della materia. Nel seguito descriviamo qualitativamente il funzionamento del diodo a semiconduttori di Silicio.

### 5.1 Cristalli semiconduttori

Premettiamo alcuni cenni sui materiali semiconduttori, rimandando a testi specializzati per una conoscenza più approfondita.

In un cristallo di silicio gli atomi sono disposti secondo una struttura regolare, in cui ogni atomo si trova al centro di un tetraedro, sui cui 4 vertici sono disposti altri 4 atomi. Il silicio é tetravalente, per cui esso mette a disposizione 4 elettroni per saturare i 4 legami covalenti che lo legano agli altri 4 atomi nella struttura tetraedrica. Gli elettroni sono quindi legati nei legami covalenti. Per effetto della temperatura ambiente solo pochi elettroni statisticamente rompono il legame che li tiene legati all'atomo: questi

pochi elettroni e le lacune corrispondenti, lasciate nei legami covalenti, vengono detti portatori intrinseci e contribuiscono alla debole conducibilità del silicio cristallino. Il silicio cristallino puro si presenta come un materiale ad elevata resistività e viene perciò classificato come semiconduttore intrinseco.

Nel cristallo di silicio si possono introdurre delle impurezze (1 atomo di impurezza ogni  $\sim 10^8$  atomi di silicio), costituite da atomi o trivalenti oppure pentavalenti, che vanno a sostituirsi ad atomi di silicio nella struttura cristallina. Queste impurezze modificano localmente la natura del cristallo puro di silicio. In esso sono presenti portatori di carica pressoché liberi (portatori estrinseci) che permettono una buona conduzione della corrente elettrica. I semiconduttori drogati sono detti semiconduttori estrinseci. (Tutti i dispositivi a semiconduttore oggi in uso sono basati su semiconduttori estrinseci.) In figura 5.2 sono disegnate in forma piana le strutture tetraedriche corrispondenti ad impurezze (o droganti) pentavalenti (figura 5.2a) oppure trivalenti (figura 5.2b).

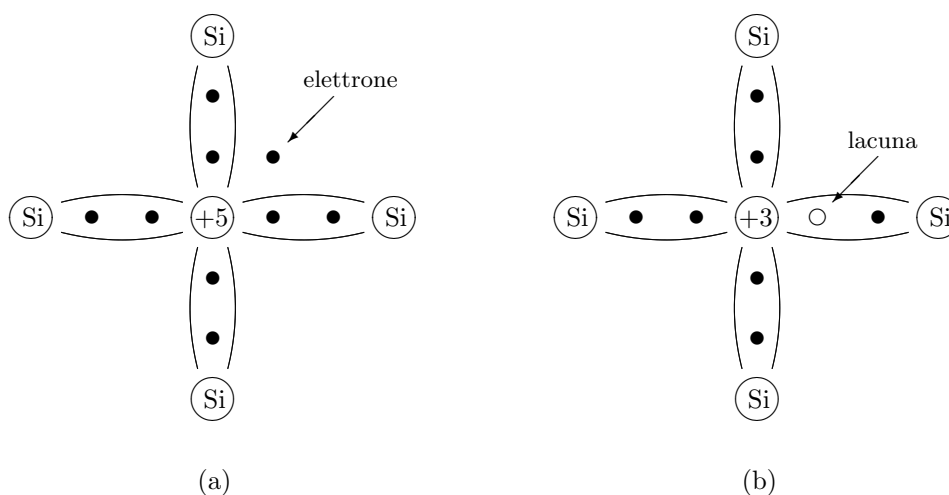


Fig. 5.2

Nel caso del drogante pentavalente i 4 legami covalenti sono saturati e resta un elettrone poco legato, che a temperatura ambiente è libero di muoversi entro il cristallo. Il drogante pentavalente è detto *donatore*, in quanto mette a disposizione un elettrone libero. Nel reticolo resta una carica positiva fissa di  $+1e$ , pari all'eccesso rispetto agli atomi di silicio. Il semiconduttore è detto di tipo *n*, poiché la conduzione è assicurata dai portatori negativi, gli elettroni.

Nel caso del drogante trivalente, solo 3 legami covalenti sono saturati. Nel quarto legame manca un elettrone: si dice che è presente una *lacuna*, che è considerata un portatore positivo: infatti un elettrone può saltare da un legame covalente saturato ad una lacuna, saturandola. Questo movimento dell'elettrone simula il movimento di una carica positiva. Il drogante trivalente è detto *accettore*. Nel reticolo cristallino è presente una carica fissa negativa di  $-1e$ , pari al difetto di una carica rispetto agli atomi di silicio. Il semiconduttore è detto di tipo *p*, poiché la conduzione è assicurata dal movimento delle lacune, che sono considerate portatori positivi.

Nei due semiconduttori *p* e *n*, oltre ai portatori indotti dai drogaggi, sono presenti i portatori intrinseci di entrambi i segni, generati per effetto termico. Però nei semiconduttori di tipo *n* i portatori negativi, gli elettroni, sono maggioritari per garantire la neutralità del materiale, mentre i portatori positivi sono minoritari. Avviene l'opposto nei semiconduttori di tipo *p*, dove i portatori maggioritari sono positivi, le lacune, e i minoritari sono gli elettroni.

## 5.2 La giunzione pn

Quando in un cristallo si trovano contigue due zone, una drogata di tipo  $n$  con abbondanza di elettroni e una drogata di tipo  $p$  con abbondanza di lacune, si origina una zona di giunzione, detta giunzione  $pn$ . Vogliamo ora capire i fenomeni che si verificano nella zona della giunzione  $pn$ , facendo riferimento alla situazione idealizzata rappresentata in figura 5.3.

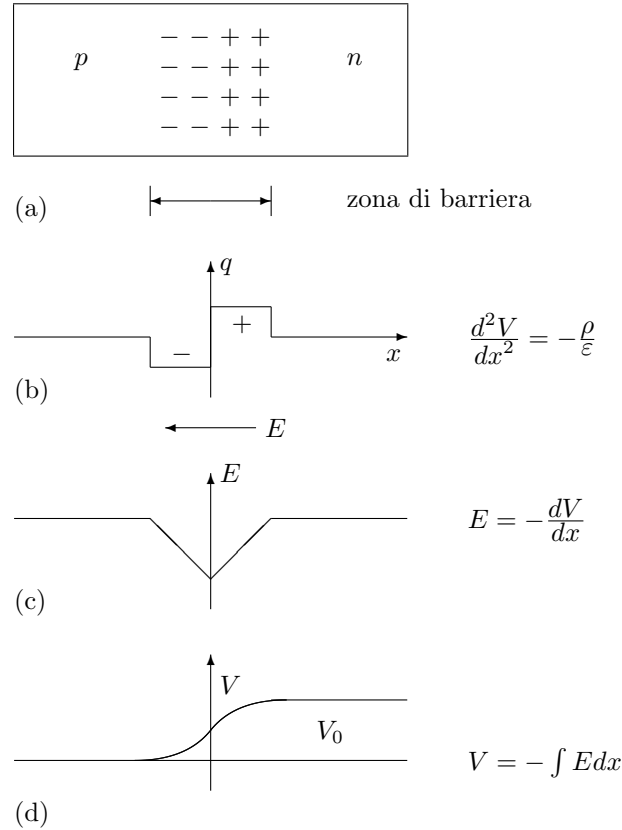


Fig. 5.3

Ai due lati del piano di separazione fra le due zone  $p$  e  $n$  sono presenti due distribuzioni di portatori liberi, le lacune maggioritarie nella zona  $p$ , gli elettroni maggioritari nella zona  $n$ . Elettroni e lacune maggioritari diffonderanno oltre il piano di separazione per uniformare le concentrazioni. Così facendo però viene a cadere la neutralità elettrica nelle due zone, come indicato in figura 5.3a: appaiono le cariche fisse negative e positive rispettivamente nelle zone  $p$  e  $n$ . Questo fatto origina le due distribuzioni di carica affacciate, indicate nella figura 5.3b. Queste cariche producono un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , diretto dalla zona  $n$  alla zona  $p$ . Questo campo  $\mathbf{E}$  contrasta la diffusione dei portatori maggioritari; invece favorisce il flusso dei portatori minoritari delle due zone, in quanto essi si trovano il campo in favore. La zona di barriera è quindi attraversata da quattro correnti:

- $I(p+)$  → corrente di diffusione delle lacune da  $p$  a  $n$
- $I(p-)$  → corrente di campo degli elettroni da  $p$  a  $n$
- $I(n+)$  ← corrente di campo delle lacune da  $n$  a  $p$
- $I(n-)$  ← corrente di diffusione degli elettroni da  $n$  a  $p$

All'equilibrio le correnti si compensano a due a due:  $I(p+)$  é uguale in intensità ed opposta a  $I(n+)$ ;  $I(n-)$  é uguale in intensità ed opposta a  $I(p-)$ . La zona di barriera é dinamicamente vuota di portatori ed é quindi ad elevatissima resistività: la zona di barriera é un isolante. Lo spessore della zona di barriera é tale affinché le due distribuzioni di carica affacciate generino un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , e quindi un potenziale  $V_0$ , che limiti il processo di diffusione in modo da mantenere l'equilibrio delle correnti.

Studiamo ora che cosa accade quando noi dall'esterno modifichiamo il potenziale di barriera, applicando una differenza di potenziale che lo faccia diminuire, oppure aumentare. Facciamo riferimento alla figura 5.4 che segue.

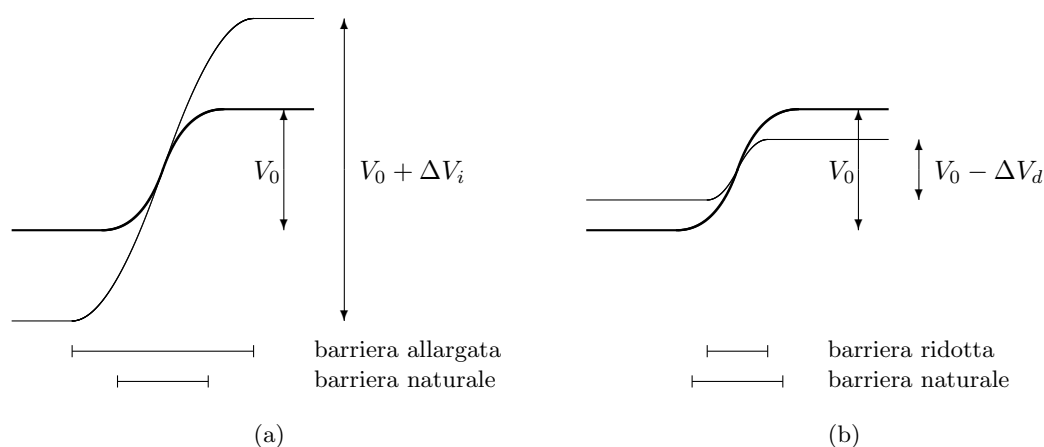


Fig. 5.4

Se il potenziale di barriera  $V_0$  viene incrementato di un valore positivo  $+\Delta V_i$  (figura 5.4a) la zona di barriera reagisce allargandosi in modo che le cariche fisse affacciate aumentino. Il piú elevato potenziale di barriera blocca il processo di diffusione, fermando le relative correnti. Restano invece favorite le correnti di campo, dovute ai portatori intrinseci, che aumentano debolmente. Essendo però queste correnti deboli, scorre una corrente complessiva debole, detta corrente inversa di giunzione.

Se il potenziale di barriera  $V_0$  viene diminuito di un valore negativo  $-\Delta V_d$  (figura 5.4b) la zona di barriera reagisce riducendosi in modo che le cariche fisse affacciate diminuiscano. Il piú basso potenziale di barriera favorisce il processo di diffusione, facendo aumentare considerevolmente le relative correnti. Nella giunzione scorre una corrente complessiva significativa, detta corrente diretta di giunzione.

Ecco allora che una giunzione  $pn$  mostra un comportamento che approssima quello di un diodo. La zona drogata di tipo  $p$  é l'anodo del diodo; la zona drogata di tipo  $n$  ne é il catodo. La corrente positiva scorre nel diodo quando l'anodo é debolmente positivo rispetto al catodo. Quando l'anodo é a potenziale negativo rispetto al catodo scorre una debolissima corrente inversa di saturazione. La curva che segue (figura 5.5) illustra la caratteristica di funzionamento del diodo reale a semiconduttori.

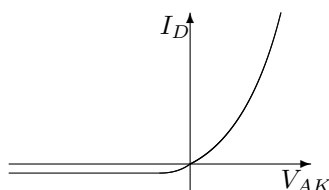


Fig. 5.5

E' stata dedotta la relazione matematica che descrive la curva rappresentata in figura 5.5.

$$I_D = I_{SS} \cdot \left( e^{\frac{q_e V_{AK}}{kT}} - 1 \right)$$

con

$I_{SS}$  corrente inversa di saturazione della giunzione

$q_e$  carica dell'elettrone

$k$  costante di Boltzmann

$T$  temperatura assoluta.

### 5.3 Il diodo a semiconduttori

Il rapporto  $kT/q_e$  viene scritto anche come  $V_T$  (detto potenziale termico) e vale  $\sim 26mV$  a temperatura ambiente. L'espressione della corrente viene scritta nel modo seguente:

$$I_D = I_{SS} \cdot \left( e^{\frac{V_{AK}}{V_T}} - 1 \right).$$

La curva caratteristica del diodo a giunzione dipende dalla temperatura e varia con essa.

Normalmente la curva caratterisitica di un diodo viene rappresentata su due assi cartesiani con scala diversa fra semiasse positivo e semiasse negativo, come presentato nella figura 5.6.

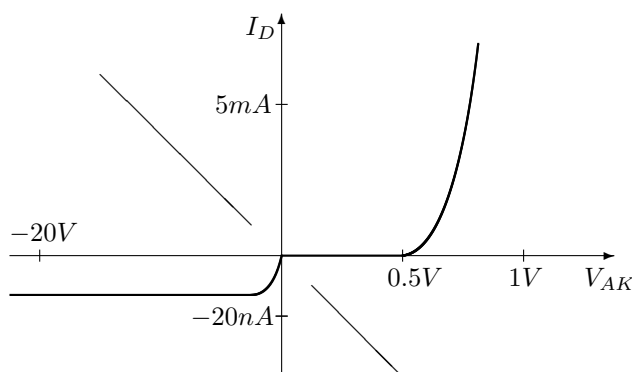


Fig. 5.6

Si notino le scale diverse sui semiassi.

Osservando il primo quadrante si nota che la curva inizia ad avere valori significativi di corrente, dell'ordine del milliampere, solo oltre 0.5V. Questa tensione  $V_\gamma$  può essere presa come tensione di soglia, al di là della quale il diodo è operativo e si ha una buona corrente diretta. La corrente diretta massima è limitata dalla dissipazione di calore che il diodo può sostenere.

Osservando il terzo quadrante si nota una corrente inversa molto piccola con tensioni inverse dell'ordine delle decine di volt. In effetti esistono diodi di diversa fattura che possono sostenere tensioni inverse anche molto elevate. Il limite a queste tensioni è dato dall'instaurarsi di una scarica a valanga, che fa aumentare considerevolmente la corrente inversa a tensioni inverse elevate, con conseguente altissima dissipazione di calore ed immediata rottura del diodo.

Possiamo studiare il comportamento del diodo per piccole variazioni di corrente attorno al punto di lavoro. Calcoliamo la variazione della corrente con la tensione:

$$\frac{dI_D}{dV} = \left( I_{SS} \cdot e^{V_{AK}/V_T} \right) \frac{1}{V_T} \simeq I_D \frac{1}{V_T}$$

$$\frac{dV}{dI_D} = r_d = \frac{V_T}{I_D} = \frac{26(mV)}{I_D(mA)}$$

$r_d$  é la resistenza dinamica del diodo polarizzato con la corrente  $I_D$ : il suo valore risulta in ohm quando la corrente  $I_D$  é espressa in milliampere.

Disegniamo il circuito equivalente del diodo per piccole variazioni attorno al punto di lavoro (figura 5.7a) e la curva caratteristica relativa (figura 5.7b):

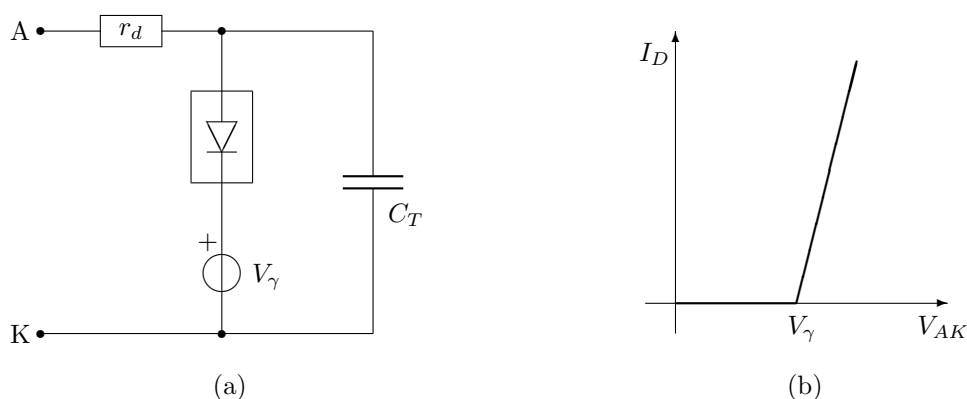


Fig. 5.7

Nel circuito equivalente é indicato il condensatore  $C_T$ , originato dalle due distribuzioni di carica affacciate nella zona di giunzione. Il condensatore, della capacità di pochi picofarad, fa sentire la sua presenza quando il diodo si polarizza inversamente e la conduzione si interrompe.

## 5.4 Utilizzo pratico dei diodi

Vediamo alcune fra le tante applicazioni pratiche dei diodi.

### 5.4.1 Raddrizzamento della tensione alternata

Uno degli usi principali dei diodi consiste nel raddrizzamento della tensione alternata. Facciamo riferimento alla figura 5.8 che segue.

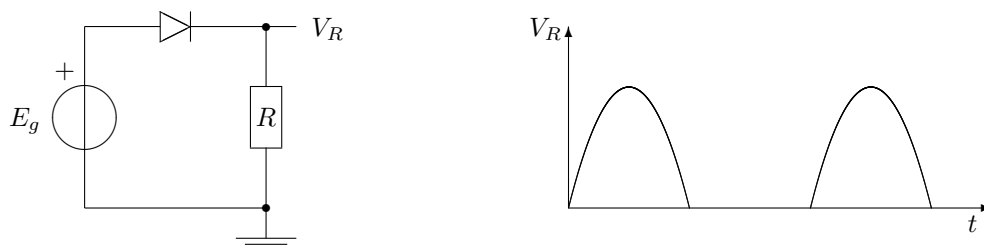


Fig. 5.8

Il generatore  $E_g$  invia una sinusoide. Il diodo lascia passare sole le alternanze positive verso il resistore  $R$ . Nel grafico di figura 5.8 appaiono le sole semionde positive. In questo caso si ha un raddrizzamento a semionda.

Consideriamo ora la figura 5.9.

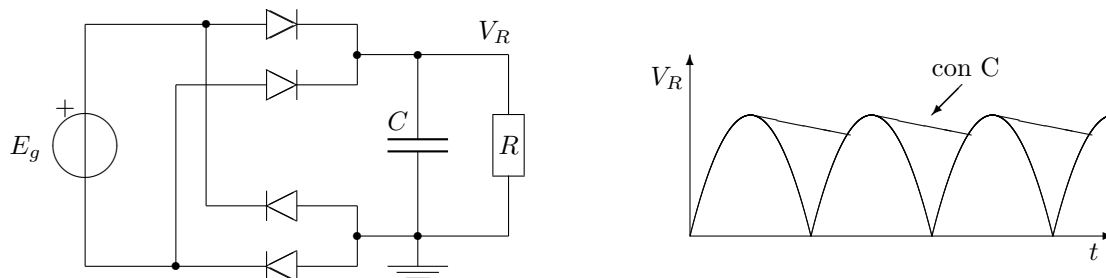


Fig. 5.9

In figura 5.9 é presentato un raddrizzatore ad onda intera, cioè dove entrambe le alternanze sono raddrizzate. In assenza del condensatore  $C$ , sul resistore  $R$  si vedono le semionde positive di tensione, come presentato nel grafico. La presenza del condensatore, di opportuna capacità, fa sí che esso venga caricato dal raddrizzatore e parzialmente scaricato dal resistore, cosí da realizzare il tratto superiore, che é sempre positivo ed ha un'ondulazione residua. Il condensatore costituisce un serbatoio di carica a cui attingere; tale serbatoio é ciclicamente ricaricato. Con questo metodo si può costruire una sorta di generatore di tensione continua a partire da una tensione alternata.

#### 5.4.2 Vincolo bilaterale

Realizziamo il semplice circuito presentato in figura 5.10.

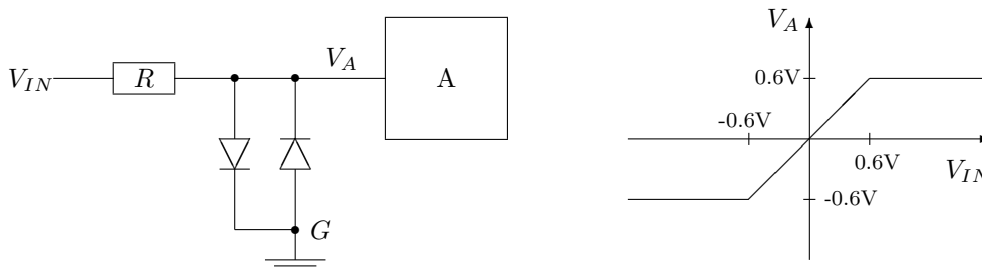


Fig. 5.10

Il resistore  $R$  limita la corrente nei diodi e li protegge. Se il punto  $G$  é vincolato a zero, per qualsiasi valore di  $V_{IN}$  il valore di  $V_A$  é vincolato a restare fra -0.6V e +0.6V. Ovviamente il punto  $G$  può essere vincolato a qualsivoglia tensione. In questo modo si può proteggere l'ingresso del dispositivo  $A$ , vincolando l'escursione della tensione al suo ingresso.

### 5.5 Diodi a valanga e diodi Zener

Esaminiamo che cosa può accadere quando un diodo é polarizzato inversamente. Il campo risultante all'interno della zona di giunzione può essere cosí intenso che gli elettroni fra due urti con il reticolo possono acquisire sufficiente energia da strappare nell'urto un elettrone fra quelli legati nei legami covalenti. Si instaura cosí un meccanismo di moltiplicazione a valanga, che può originare una intensa corrente

inversa. Oppure attraverso il drogaggio si può far in modo che il campo risulti così intenso da strappare direttamente degli elettroni legati: è questo il meccanismo di Zener, che gioca un ruolo rilevante attorno e al di sotto di 6V.

In figura 5.11 è disegnata la caratteristica inversa di un diodo Zener; la caratteristica diretta resta quella di un diodo normale.

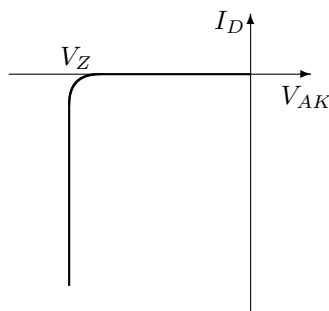


Fig. 5.11

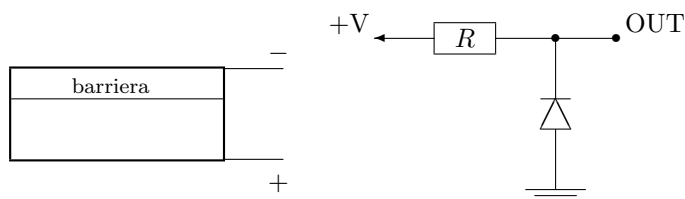
È importante la pendenza del tratto discendente della caratteristica. Quanto più il tratto discendente è parallelo all'asse delle ordinate, tanto più la tensione resta stabile al variare della corrente. Ecco allora che un diodo Zener può essere utilizzato per stabilizzare tensioni con limitate variazioni di corrente.

Il diodo Zener è molto usato per costruire precisi riferimenti di tensione. Infatti, attraverso opportuna compensazione al momento della fabbricazione, un diodo Zener può fornire un valore molto preciso di tensione con un coefficiente di temperatura molto piccolo a una ben determinata corrente, ad es.  $6.7986V \pm 0.0003\%/C$  a  $100\mu A$ .

## 5.6 Le giunzioni $pn$ come rivelatori di radiazione (cenni)

Rivelatore di luce.

Si può costruire una giunzione superficiale, tale che la zona di barriera si trovi praticamente alla superficie del cristallo. Sulla superficie è depositato uno strato sottilissimo d'oro ( $\sim 1000$  angstrom) semitrasparente alla luce, che costituisce un elettrodo del diodo. L'altro elettrodo, generalmente di alluminio, è depositato sull'altra faccia del cristallo. La figura sottostante illustra l'uso del diodo come rivelatore di luce (fotodiodo).



Il fotodiodo viene polarizzato inversamente in modo da creare la zona di svuotamento di portatori. La luce penetra nella zona di barriera ed estrae elettroni per effetto fotoelettrico. Gli elettroni vengono raccolti agli elettrodi. In tal modo il fotodiodo diviene un generatore di corrente comandato dalla luce, e l'intensità della corrente generata è proporzionale all'intensità della luce incidente.



Rivelatore di radiazioni ionizzanti.

Si realizzano delle giunzioni *pin*, dove lo *i* sta per *intrinseco*, attraverso un particolare processo di fabbricazione. Si parte da un cubetto, di qualche decina di cc, di silicio iperpuro. Due facce opposte vengono drogate, una di tipo *n*, l'altra di tipo *p*, su uno strato superficiale sottilissimo. Succede allora che la zona delle cariche fisse positive è concentrata su un lato, la zona delle cariche fisse negative è concentrata sul lato opposto. Il rivelatore viene polarizzato inversamente. La zona intermedia è sede di un intenso campo elettrico ed è vuota di portatori: eventuali cariche elettriche separate in questa zona da una radiazione ionizzante sono prontamente raccolte dal campo. Il volume del cristallo di silicio funziona da rivelatore di radiazioni. Un tale cristallo è un particolare tipo di diodo. Questi rivelatori devono operare a temperature criogeniche per contenere il rumore elettronico e richiedono una sofisticata elettronica di lettura.

## 5.7 I diodi nei circuiti logici

I diodi stanno alla base della moderna elettronica digitale. Vediamo i circuiti che hanno dato origine a questo settore dell'elettronica.

Consideriamo la figura 5.12 che segue.

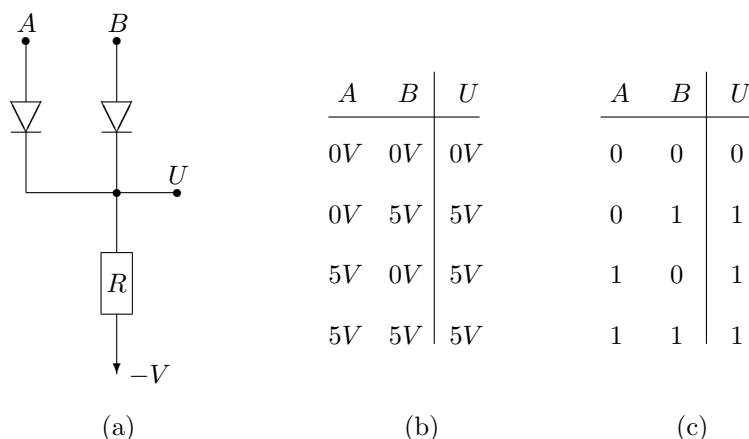


Fig. 5.12

In figura 5.12a è disegnato il circuito a diodi che vogliamo studiare. I diodi siano ideali. Agli ingressi *A* e *B* può essere applicato un livello di tensione di 0V oppure di +5V. Nella tabella di figura 5.12b è indicato come si comporta elettricamente l'uscita *U* in funzione delle tensioni applicate agli ingressi *A* e *B*. Verifichiamo che la tabella (b) è corretta. Siano gli ingressi *A* e *B* entrambi a 0V. I diodi conducono entrambi e l'uscita *U* è a 0V. Se l'ingresso *A* è a 0V e l'ingresso *B* è a 5V, succede che il diodo connesso a *B* controlla l'uscita *U* e la tiene a 5V perché è in polarizzazione diretta, mentre il diodo connesso ad *A* si trova con l'anodo a 0V e il catodo a +5V e quindi si trova in polarizzazione inversa e non controlla *U*. La stessa considerazione vale se si scambiano i ruoli di *A* e *B*. Se entrambi gli ingressi *A* e *B* sono a 5V, l'uscita *U* è a 5V.

La tabella (c) si ottiene dalla tabella (b) sostituendo al livello di tensione di 0V il livello logico 0, al livello di tensione +5V il livello logico 1. *A* e *B* sono variabili binarie, che possono assumere i due soli valori 1 e 0. *U* è una funzione binaria, che può assumere anch'essa i due soli valori 1 e 0. Mutuando dal linguaggio della logica delle decisioni, al valore 1 viene dato l'attributo di *vero*, al valore 0 l'attributo di *falso*. La funzione *U* presentata in tabella (c) è la funzione logica *OR*: la funzione è vera quando almeno una delle variabili d'ingresso è vera. Il circuito a diodi della figura 5.12a meccanizza la funzione logica *OR*.

Consideriamo ora la figura 5.13 che segue.

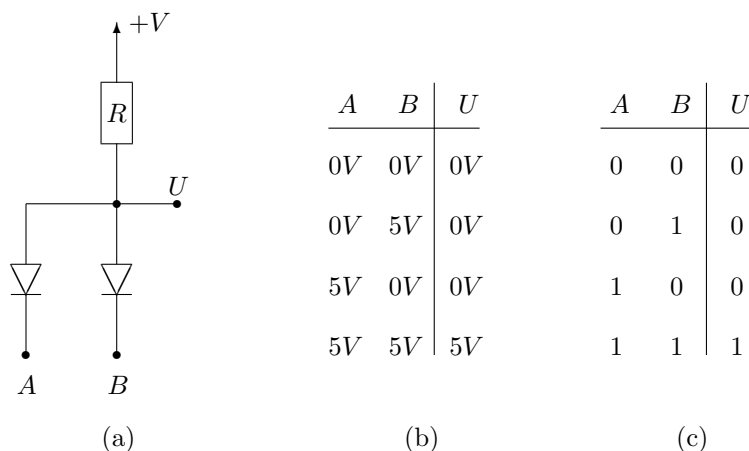


Fig. 5.13

In figura 5.13a é disegnato il circuito a diodi che vogliamo studiare. I diodi siano ideali. Agli ingressi  $A$  e  $B$  può essere applicato un livello di tensione di 0V oppure di +5V. Nella tabella di figura 5.13b é indicato come si comporta elettricamente l'uscita  $U$  in funzione delle tensioni applicate agli ingressi  $A$  e  $B$ . Verifichiamo che la tabella (b) é corretta. Siano gli ingressi  $A$  e  $B$  entrambi a 0V. I diodi conducono entrambi e l'uscita  $U$  é a 0V. Se l'ingresso  $A$  é a 0V e l'ingresso  $B$  é a 5V, succede che il diodo connesso a  $A$  controlla l'uscita  $U$  e la tiene a 0V perché é in polarizzazione diretta, mentre il diodo connesso ad  $B$  si trova con l'anodo a 0V e il catodo a +5V e quindi si trova in polarizzazione inversa e non controlla  $U$ . La stessa considerazione vale se si scambiano i ruoli di  $A$  e  $B$ . Se entrambi gli ingressi  $A$  e  $B$  sono a 5V, l'uscita  $U$  é a 5V.

La tabella (c) si ottiene dalla tabella (b) sostituendo al livello di tensione di 0V il livello logico 0, al livello di tensione +5V il livello logico 1.  $A$  e  $B$  sono variabili binarie, che possono assumere i due soli valori 1 e 0.  $U$  é una funzione binaria, che può assumere anch'essa i due soli valori 1 e 0. Mutuando dal linguaggio dalla logica delle decisioni, al valore 1 viene dato l'attributo di *vero*, al valore 0 l'attributo di *falso*. La funzione  $U$  presentata in tabella (c) é la funzione logica *AND*: la funzione é vera quando entrambe le variabili d'ingresso sono vere. Il circuito a diodi della figura 5.13a meccanizza la funzione logica *AND*.

## Capitolo 6

# Il transistor bipolare (BJT)

I diodi a giunzione che abbiamo considerato finora sono dispositivi elettronici a due elettrodi. Considereremo ora un dispositivo a tre elettrodi, il transistor bipolare a giunzioni (BJT), costituito sostanzialmente da due diodi contrapposti e parzialmente compenetrati. Vedremo due tipi di transistor, a seconda che i due diodi contrapposti hanno in comune la zona  $n$  (**PNP**) oppure la zona  $p$  (**NPN**).

Aiutandoci con la figura 6.1 analizziamo schematicamente e in forma qualitativa la struttura e il funzionamento dei transistor. Nella metà sinistra della figura è descritto il transistor PNP, nella metà destra il transistor NPN.

Nella figura 6.1a sono riportate le strutture dei due transistor con gli elettrodi esterni. L'elettrodo **E** è l'**emettitore**; l'elettrodo **B** è la **base**; l'elettrodo **C** è il **collettore**. Nella figura 6.1b sono riportati gli andamenti dei potenziali naturali di barriera all'equilibrio, quando ai transistor non sono applicate polarizzazioni esterne. Nella figura 6.1c sono riportati i potenziali che si ottengono con le polarizzazioni esterne.

Analizziamo il transistor PNP. Aggiungendo una polarizzazione positiva  $V_{EB}$ , il potenziale della giunzione E-B viene abbassato. I portatori maggioritari (le lacune positive) della zona  $p$  si riversano nella zona di base. Lo spessore della zona di base è piccolo rispetto alla lunghezza di diffusione dei portatori maggioritari, che quindi in gran numero penetrano nella giunzione B-C. Una piccola frazione dei portatori si ricombina nella regione di base. La giunzione B-C viene polarizzata inversamente con l'applicazione del potenziale negativo  $V_{CB}$ . Pertanto i portatori che vi giungono sono raccolti integralmente. L'intero transistor è attraversato da una corrente positiva che scorre dall'emettitore al collettore: è ora evidente il perché di questi nomi. Nel simbolo del transistor PNP in figura 6.1d la freccetta sull'emettitore identifica l'emettitore stesso e indica il senso positivo della corrente che attraversa il transistor.

Si può ripetere in analogia l'analisi per il transistor NPN. Una polarizzazione negativa  $V_{EB}$  innesca il flusso dei portatori maggioritari della zona  $n$  (gli elettroni) che si riversano nella zona di base e l'attraversano in gran numero. Una piccola frazione dei portatori si ricombina nella regione di base. La giunzione B-C è polarizzata inversamente con l'applicazione del potenziale positivo  $V_{CB}$ . I portatori che vi giungono sono raccolti integralmente. L'intero transistor è attraversato da una corrente negativa che scorre dall'emettitore al collettore, o in modo equivalente da una corrente positiva che scorre dal collettore all'emettitore. Nel simbolo del transistor NPN in figura 6.1d la freccetta sull'emettitore identifica l'emettitore stesso e indica il senso positivo della corrente che attraversa il transistor.

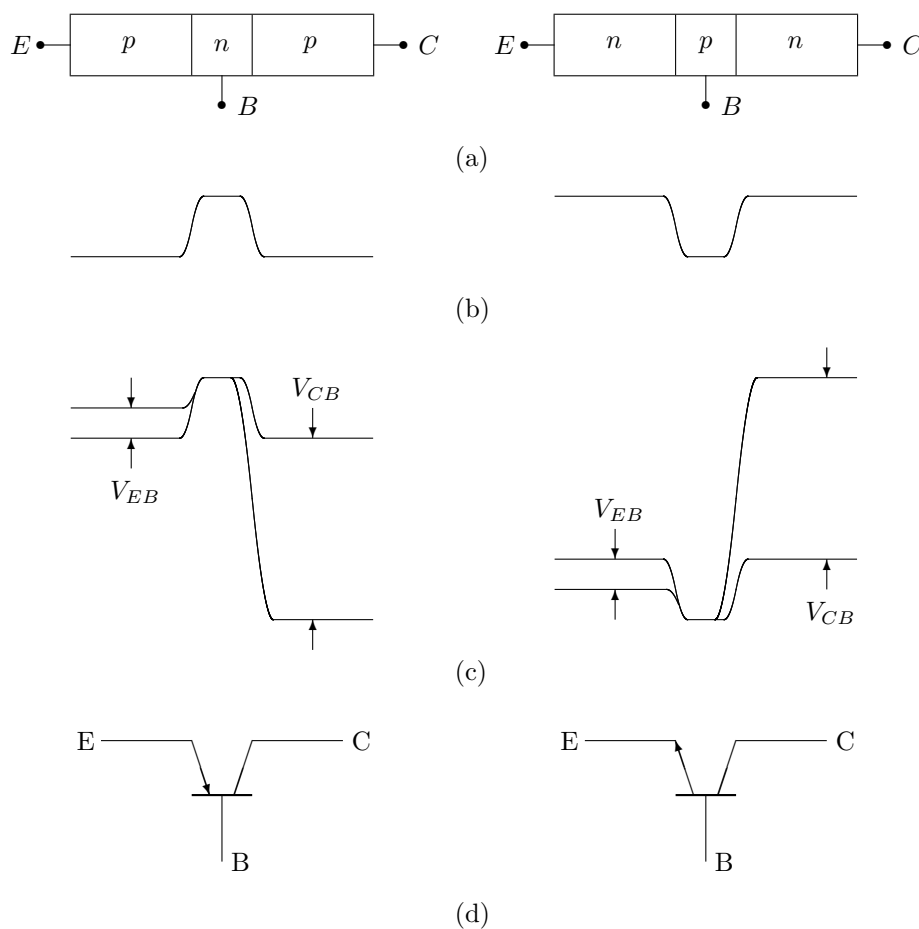


Fig. 6.1

## 6.1 Il transistor come amplificatore

Analizziamo ora che cosa avviene nella regione di base, con riferimento al transistor PNP. Come abbiamo visto, i portatori maggioritari positivi (le lacune) iniettati dall'emettitore (la corrente  $i_e$ ) attraversano la regione di base e in altissima percentuale ( $\simeq 99\%$ ) vengono raccolti al collettore come corrente  $i_c$ ; in piccola percentuale ( $\simeq 1\%$ ) essi si ricombinano nella regione di base con portatori di segno opposto, cioè negativi (elettroni), presi nei legami covalenti, variando lo stato di carica locale. Per ribilanciare la carica nella base, un numero corrispondente di portatori positivi deve lasciare la regione di base attraverso il circuito esterno, dando luogo ad una debole corrente di base  $i_b$ .

Un discorso analogo va ripetuto per il transistor NPN, semplicemente invertendo il segno delle cariche in movimento e quindi il segno delle correnti.

In entrambi i casi vale la seguente relazione fra le correnti:  $i_e = i_b + i_c$ .

Modificando dall'esterno il potenziale della barriera della giunzione E-B in modo che i portatori maggioritari scorrano in gran numero, affinché il transistor possa operare è essenziale che possa scorrere la corrente di base, che porta via le cariche ivi prodotte: in caso contrario si avrebbe un accumulo di cariche

nella base, che bloccherebbe il moto di diffusione dei portatori dall'emettitore con conseguente blocco del funzionamento del transistor. Alternativamente, facendo scorrere dall'esterno una corrente di base, si modifica il potenziale della barriera della giunzione E-B in modo che i portatori maggioritari possano scorrere in gran numero: in altre parole, **controllando la debole corrente di base  $i_b$  si controlla la piú intensa corrente di emettitore  $i_e$  e quindi la corrente di collettore  $i_c$ .**

Relativamente ad  $i_c$  dobbiamo fare la seguente considerazione: il campo elettrico nella zona di collettore é diretto in modo tale da raccogliere integralmente i portatori in arrivo, indipendentemente dall'intensitá del campo stesso. Quindi **la corrente  $i_c$  é indipendente dal potenziale del collettore, purché tale potenziale mantenga polarizzata inversamente la giunzione di collettore.**

Ricaviamo alcune relazioni fra le correnti dei transistor, introducendo il fattore  $\alpha$  ( $0.98 \leq \alpha < 1$ ), che dá la frazione della corrente di emettitore che viene raccolta al collettore, partendo da:

$$i_c = \alpha i_e \qquad i_e = i_b + i_c$$

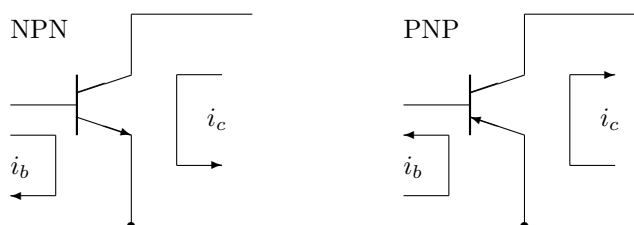
Con semplici calcoli esprimiamo  $i_e$  e  $i_c$  in funzione di  $i_b$ .

$$i_c = \alpha(i_c + i_b) \qquad i_c(1 - \alpha) = \alpha i_b \qquad i_c = \frac{\alpha}{1 - \alpha} i_b = \beta i_b$$

$$i_e = \beta i_b + i_b = (\beta + 1)i_b$$

Il fattore  $\beta$  é il guadagno di corrente del transistor e in buoni transistor puó essere:  $\beta = 100$ . Ciò significa che, controllando una corrente di base  $i_b$ , possiamo controllare una corrente di collettore  $i_c$  100 volte superiore.

Consideriamo ora la figura che segue, in cui sono schematizzati i transistor NPN e PNP.



Notiamo il circuito di base con la corrente  $i_b$  e il circuito di collettore con la corrente  $i_c$ . Possiamo concludere che un transistor é *un generatore reale di corrente comandato di corrente* con amplificazione  $\beta$ :  $i_c = \beta i_b$ . Il transistor é l'elemento base per costruire gli amplificatori di segnali elettrici.

## 6.2 Curve caratteristiche di un transistor

Tracciamo le curve caratteristiche di un transistor NPN usando il circuito di figura 6.2. Nel circuito di base sono collegati in serie: il generatore di tensione variabile E1; il resistore  $R_B$ ; il microamperometro  $\mu A$ . L'inserimento del resistore rende piú facile e precisa la regolazione della corrente di base  $i_b$ , il cui valore viene letto sul microamperometro. Variando l'impostazione del generatore E1 si regola la corrente di base al valore voluto. Nel circuito di collettore sono collegati in serie: un milliamperometro  $mA$  che misura la corrente  $i_c$ ; un generatore di tensione variabile E2. In parallelo al transistor é collegato un voltmetro  $V$  che misura la tensione  $V_{CB}$  impostata regolando il generatore E2 al valore voluto.

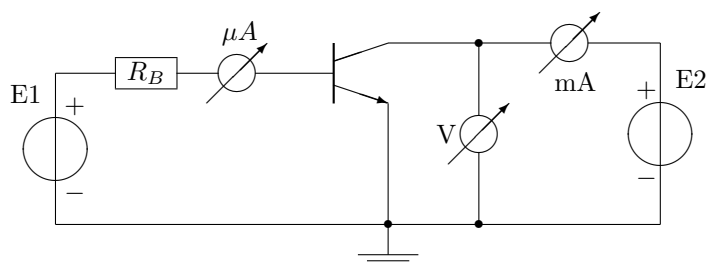


Fig. 6.2

Non disegniamo la curva caratteristica base-emettitore poiché in condizioni di funzionamento è sostanzialmente la curva di un diodo polarizzato direttamente.

Col circuito di figura 6.2 si costruiscono le curve caratteristiche presentate in figura 6.3: viene disegnata la corrente di collettore  $I_C$  rispetto alla tensione collettore-emettitore  $V_{CE}$  per vari valori della corrente di base  $I_B$ , quest'ultima mantenuta come parametro costante per ogni curva.



Fig. 6.3

Osserviamo l'andamento delle curve. Notiamo una zona di salita comune a tutte le curve, poi ogni curva si stacca e procede in un tratto orizzontale. Nel transistor reale il tratto non è orizzontale, ma è in leggera salita al crescere di  $V_{CE}$ . Poiché in genere questa pendenza è molto piccola, si tende a trascurarla e a considerare orizzontali i tratti. Questo significa che la corrente  $I_C$  non dipende dalla tensione  $V_{CE}$ : *il transistor nel tratto orizzontale approssima un generatore ideale di corrente*. Abbiamo qui la conferma sperimentale del comportamento del transistor previsto dallo studio delle giunzioni, cioè della raccolta integrale dei portatori nella giunzione di collettore polarizzata inversamente.

Consideriamo ora il tratto comune in salita per piccoli valore della tensione  $V_{CE}$ . Abbiamo indicato sulle ascisse il valore  $V_S$  della tensione  $V_{CE}$ , al di sotto del quale le curve si sovrappongono. Si dice allora che nell'intervallo di tensioni fra  $0V$  e  $V_S$  il transistor è in *saturazione*. (Questo comportamento non è spiegato dal semplice modello schematico che abbiamo adottato per capire il funzionamento del transistor, in cui abbiamo utilizzato potenziali di barriera ben definiti. Occorre far ricorso ad un modello più complesso quando le tensioni di polarizzazione diventano molto piccole rispetto al potenziale naturale della barriera.) Il valore di  $V_S$  è piccolo nei transistor di bassa potenza: può variare fra i  $20mV$  e i  $50mV$  con correnti di collettore  $I_C$  di  $5 \div 10mA$ . Facendo il rapporto fra tensione e corrente nella zona di saturazione troviamo che la resistenza equivalente  $r_s$  di saturazione vale pochi ohm: il transistor in saturazione presenta ora una resistenza molto piccola fra collettore ed emettitore. Si tende a trascurare questa resistenza

$r_s$  ed a considerare il transistor in saturazione come un interruttore chiuso senza resistenza. Questo comportamento é alla base dell'uso dei transistori nell'elettronica digitale.

### 6.3 Retta di carico e punto di lavoro del transistor

Nell'elettronica lineare il transistor é utilizzato nella zona in cui opera come generatore di corrente comandato di corrente. Per utilizzarlo occorre **polarizzarlo**, cioè occorre predisporre un regime di tensioni e correnti che lo mettono in grado di operare. Vediamo come si fa.

Innanzitutto disegniamo un semplice circuito (figura 6.4) con un transistor a emettitore comune; il segnale giunge sulla base come segnale di corrente ed esce dal collettore come segnale di tensione.

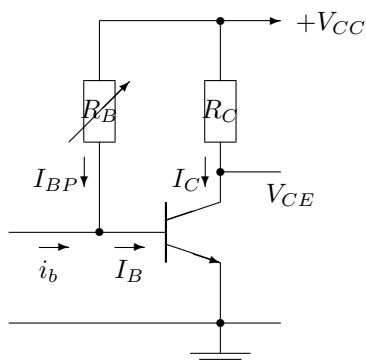


Fig. 6.4

Il circuito é alimentato con una tensione positiva  $+V_{CC}$ . Sul resistore  $R_C$  si sviluppa il segnale di tensione in uscita. Il resistore variabile  $R_B$  serve per regolare la corrente da inviare alla base del transistor. Usando le caratteristiche C-E, riportate in figura 6.5, andiamo a fissare il punto di lavoro del transistor.

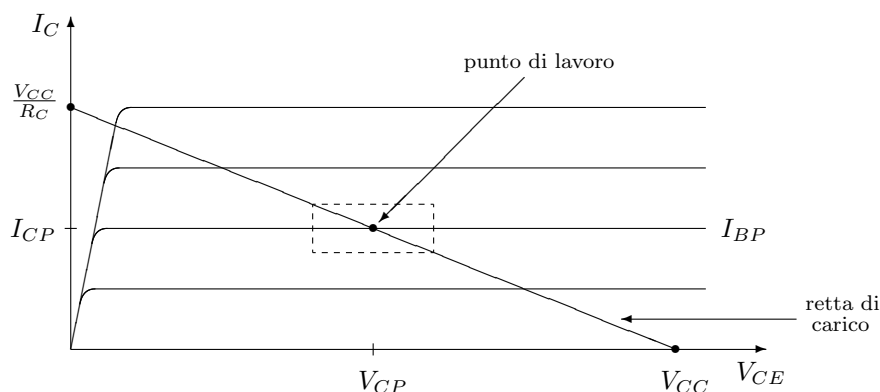


Fig. 6.5

Tracciamo la *retta di carico*. Se nel transistor non scorre alcuna corrente di collettore, cioè  $I_C = 0$ , la tensione di collettore  $V_{CE}$  é uguale alla tensione di alimentazione  $+V_{CC}$  perché con  $I_C = 0$  sul resistore  $R_C$  non c'è caduta di tensione. Segnamo il punto  $+V_{CC}$  sull'asse delle ascisse  $V_{CE}$ . Se il collettore del transistor é cortocircuitato a massa, cioè  $V_{CE} = 0$ , la corrente che passa nel resistore  $R_C$  é uguale a  $\frac{V_{CC}}{R_C}$ : questa é la massima corrente che può scorrere nel ramo del collettore. Segnamo questo valore sull'asse delle ordinate  $I_C$ . Riuniamo con una retta (vale la legge di Ohm) i due punti tracciati: abbiamo costruito

la retta di carico, che lega  $V_{CE}$  e  $I_C$ .

Ora fissiamo il *punto di lavoro*. Scegliamo il valore della corrente di base che pone la tensione del collettore  $V_{CE}$  a metà fra  $0V$  e  $+V_{CC}$ . Il valore di  $I_B$  è  $I_{BP}$ .  $I_{BP}$  è la corrente di base di polarizzazione del transistor. L'intersezione della curva corrispondente a  $I_{BP}$  con la retta di carico determina il punto di lavoro del transistor.  $V_{CP}$  e  $I_{CP}$  sono rispettivamente la tensione e la corrente di polarizzazione del transistor.

A questo punto torniamo al nostro circuito (figura 6.4) e regoliamo il valore di  $R_B$  in modo che la corrente di base sia proprio  $I_{BP}$ . Il collettore si porterà alla tensione  $V_{CP}$  e sarà percorso dalla corrente  $I_{CP}$ . Il transistor risulta correttamente polarizzato.

## 6.4 Linearità per piccoli segnali

Fissato il punto di lavoro, che d'ora in poi specificheremo con l'aggettivo *statico*, studiamo che cosa accade per piccole variazioni delle correnti e delle tensioni attorno al punto di lavoro statico. Supponiamo cioè di far funzionare il nostro transistor in modo che il punto di lavoro effettivo, che specificheremo con l'aggettivo *dinamico*, si muova all'interno del piccolo riquadro rettangolare tratteggiato, disegnato sulla figura 6.5. Questo modo di operare vien specificato con la dizione gergale *per piccoli segnali*.

Consideriamo che nella zona delle curve caratteristiche orizzontali il comportamento del transistor non devia molto dalla linearità. **Se limitiamo l'escursione del punto di lavoro dinamico alle vicinanze del punto di lavoro statico, in questo ambito di piccoli segnali l'esperienza mostra che possiamo considerare lineare il comportamento del transistor.** Ne possiamo trarre importantissime conseguenze.

Nel punto di lavoro statico vale la seguente relazione fra le correnti del transistor:

$$I_{EP} = I_{CP} + I_{BP}.$$

Nel punto di lavoro dinamico vale una relazione analoga:

$$I_E = I_C + I_B.$$

Possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$I_E = I_{EP} + i_e \quad I_C = I_{CP} + i_c \quad I_B = I_{BP} + i_b$$

dove  $i_e$ ,  $i_c$ ,  $i_b$  sono i piccoli segnali rispetto al punto di lavoro statico. Combinando le cinque relazioni che abbiamo scritto ricaviamo quest'ultima relazione, valida per i piccoli segnali:

$$i_e = i_c + i_b.$$

Il teorema della sovrapposizione ci autorizza a scindere i nostri lavori nel modo seguente.

- Si studia la polarizzazione del circuito prescindendo dai segnali da elaborare. Si progetta la rete elettrica in modo da realizzare la corretta polarizzazione dei transistor, partendo dalle loro curve caratteristiche.
- Si studia il comportamento della rete ai segnali d'ingresso, prescindendo dalle polarizzazioni.

## 6.5 Modelli matematici del transistor

Un primo modello matematico del comportamento del transistor è dovuto a Ebers e Moll (E-M). Il modello E-M è abbastanza semplice e descrive con un buon livello di approssimazione le condizioni di



funzionamento del transistor a bassa potenza ed a bassa e media frequenza, permettendo di derivare a un livello soddisfacente il funzionamento di un circuito con transistor.

Successivi affinamenti del modello sono stati introdotti.

Attualmente é preferito il modello di Gummel e Poon (G-P). Questo modello piuttosto complesso descrive molto bene tutte le caratteristiche del transistor in condizioni statiche e dinamiche in un ampio regime di potenza e di velocità di funzionamento. I moderni software di analisi automatica computerizzata dei circuiti elettronici usano proprio il modello G-P per il calcolo del comportamento dei transistori.

Noi faremo uso di un modello molto semplificato, derivato dal modello E-M, e noto come il **modello a T**. Pur nella sua estrema semplicità questo modello permette di comprendere bene la funzionalità ed i modi di utilizzo del transistor in condizioni di linearità per piccoli segnali.

## 6.6 Circuito equivalente per piccoli segnali

Per procedere nello studio della risposta della rete é necessario disporre di un circuito equivalente, per piccoli segnali, di ogni transistor che fa parte della rete. E' ovvio che deve trattarsi di un circuito equivalente lineare: con un ragionamento abbastanza semplice si può costruirlo.

Immaginando di entrare nel transistor funzionante dal terminale di emettitore, si incontra un diodo polarizzato direttamente, il cui circuito equivalente si riduce al resistore  $r_d$ , come già visto. Allora il tratto dal terminale E alla giunzione interna J presenta un resistore  $r_e$ , che si comporta come il resistore  $r_d$  del diodo. Pertanto risulta:  $r_e = 26(mV)/I_e(mA)$ .

Se dalla giunzione J si va al terminale di base B, si incontra una resistenza ohmica  $r_b$  dovuta al fatto che la regione di basa é sottilissima. Questa resistenza ha un valore compreso fra 50 e 500 ohm per transistor di bassa potenza.

Se dalla giunzione J si va verso il terminale di collettore C, si incontra la giunzione inversa che opera da generatore di corrente comandato, di guadagno  $\beta$  ( $20 < \beta < 150$ ). Inoltre in parallelo al generatore vi é il condensatore  $C_C$  (di valore compreso fra 2 e 8 pF), associato alla giunzione inversa. Infine, sempre in parallelo si considera un resistore di elevato valore (qualche  $M\Omega$ ), responsabile della pendenza residua delle curve caratteristiche di collettore.

Nella figura 6.6a che segue é disegnato lo schema equivalente di un transistor NPN per piccoli segnali; si ottiene quello di un transistor PNP semplicemente invertendo il senso delle correnti.

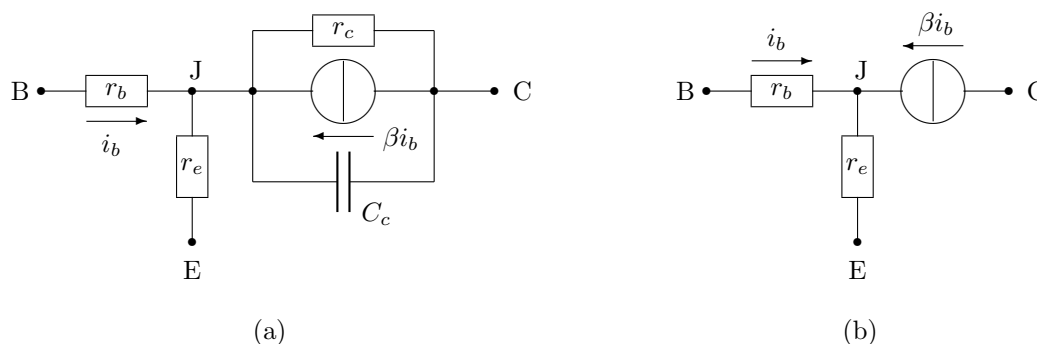


Fig. 6.6

In generale i resistori esterni hanno resistenza dell'ordine di una decina di  $K\Omega$ , in parallelo ai quali il resistore  $r_c$  ha effetto trascurabile. Inoltre se si opera a frequenze non elevatissime, tali che gli effetti del condensatore  $C_c$  siano trascurabili, anche la presenza del condensatore può essere trascurata. Allora si passa al circuito equivalente a T della figura 6.6b, che é molto semplice e ben si presta per i calcoli.

Abbiamo quindi a disposizione un circuito equivalente lineare per piccoli segnali, valido fin tanto che il punto di lavoro dinamico poco si discosta dal punto di lavoro statico.

## 6.7 Le tre configurazioni di utilizzo del transistor

Abbiamo visto che il transistor é un dispositivo a 3 terminali: E, B, C. Questi terminali possono essere utilizzati in vari modi. Un primo terminale é il terminale d'ingresso, che fa parte del circuito d'ingresso. Un secondo terminale é il terminale d'uscita, che fa parte del circuito d'uscita. Il terzo terminale deve essere il terminale *comune* ai circuiti d'ingresso e d'uscita. Sono possibili tre configurazioni in base alla scelta del terminale comune. Le tre configurazioni sono:

**CB** Configurazione a base comune (dall'inglese Common Base). Il segnale entra nell'emettitore; il segnale d'uscita é preso dal collettore.

**CC** Configurazione a collettore comune (Common Collector). Il segnale entra nella base; il segnale d'uscita viene preso dall'emettitore.

**CE** Configurazione a emettitore comune (Common Emitter). Il segnale entra nella base; il segnale d'uscita viene preso dal collettore.

Ognuna di queste configurazioni ha le sue peculiarit , come vedremo nel seguito andandole a studiare una per una. In un circuito in cui sono utilizzati pi  transistor non é difficile ritrovare che sono usate tutte e tre le configurazioni.

### 6.7.1 Configurazione a base comune CB

In figura 6.7 disegniamo un semplice circuito con un transistor PNP in configurazione CB.

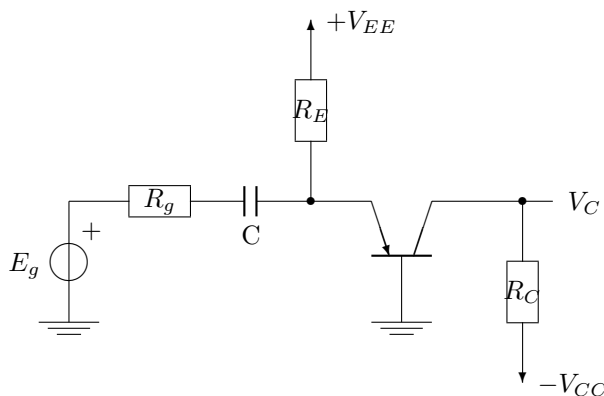


Fig. 6.7

Il circuito del transistor comprende i due resistori  $R_E$  e  $R_C$ , collegati rispettivamente agli alimentatori di tensione indicati con  $+V_{EE}$  e  $-V_{CC}$ , rispettivamente di  $+12V$  e  $-12V$ .

Il segnale viene fornito da una sorgente lineare con generatore ideale di tensione  $E_g$  e con resistore serie  $R_g$ , di  $100\Omega$ .  $E_g(t)$  sia un generatore sinusoidale che produce un segnale di  $100mV$  picco-picco a  $10KHz$ . Fra il generatore e il transistor é inserito il condensatore  $C$ , che ha il compito di non far passare per il generatore la corrente di polarizzazione del transistor. Si dice che il condensatore separa la corrente continua fra le due parti del circuito. Scegliremo per  $C$  un valore di capacit  tale che renda trascurabile

la sua impedenza a 10KHz.

Vogliamo calcolare il segnale  $V_C(t)$  in uscita.

### Calcolo della polarizzazione del circuito

Consideriamo la sorgente. La corrente massima teorica che può erogare al circuito è la sua corrente di cortocircuito  $i_{gcc}$ . Essa vale  $E_{gmax}/R_g$ , pari a 0.5mA. Questa corrente scorre nell'emettitore, quindi nel transistor. Pertanto dovremo polarizzare il transistor con una corrente più grande nel punto di lavoro, in modo da rispettare la condizione di piccole variazioni attorno al punto di lavoro. Scegliamo una corrente 10 volte superiore, cioè poniamo  $I_{CP} = 5mA$ .

La corrente di polarizzazione viene fornita dall'alimentatore  $+V_{EE}$  attraverso il resistore  $R_E$  connesso al terminale E del transistor. Noi sappiamo che la giunzione B-E è polarizzata direttamente; pertanto assumiamo una caduta convenzionale di 0.6V, cioè il terminale E è a +0.6V rispetto al terminale B che è a massa (0V). Il resistore  $R_E$  si trova connesso fra +12V e +0.6V, pari a una caduta di tensione di 11.4V. Il valore di  $R_E$  è:  $11.4V/5mA \simeq 2.2K\Omega$ .

Poniamo il punto di lavoro in tensione  $V_{CP}$  a metà tensione fra 0V e  $-V_{CC}$ , cioè attorno a -6v. La corrente di polarizzazione passa nel resistore  $R_C$ , la cui resistenza deve valere:  $(-6V) - (-12V)/5mA \simeq 1.2K\Omega$ . Calcoliamo la capacità del condensatore C. La sua reattanza vale:  $X_C = 1/\omega C$ . Essendo in serie a  $R_g$ , che vale 100Ω, scegliamo  $X_C = 1\Omega$ , da cui ricaviamo per C il valore di  $15\mu F$ .

Abbiamo dimensionato il circuito; ora calcoliamone le caratteristiche per piccoli segnali.

### Circuito equivalente di Thevenin per la configurazione CB

Disegniamo lo schema equivalente del circuito per i piccoli segnali spegnendo gli alimentatori, che vengono sostituiti con un cortocircuito a massa (applicazione del teorema della sovrapposizione), ed eliminando il condensatore C. Ovviamente al transistor sostituiamo il suo circuito equivalente per piccoli segnali. Iniziamo da  $E_g$  e proseguiamo lungo il circuito.

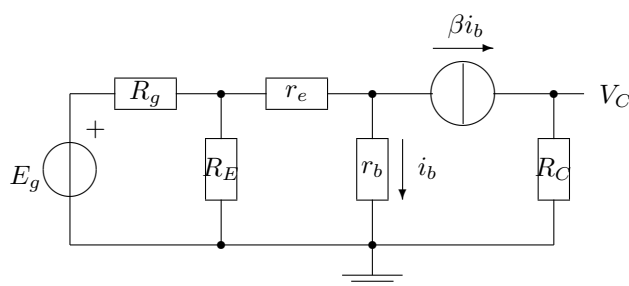


Fig. 6.8

Questo di figura 6.8 è il circuito equivalente per piccoli segnali del circuito di figura 6.7. Esso presenta tre nodi, perciò può essere risolto con un sistema di due equazioni ai nodi. Possiamo però fare una semplificazione. Il resistore  $R_E$  ha una resistenza abbastanza grande rispetto a  $R_g$ ; perciò si commette un errore piccolo col considerarla di valore infinito e quindi trascurarla. Il circuito di figura 6.8 diviene quello di figura 6.9.

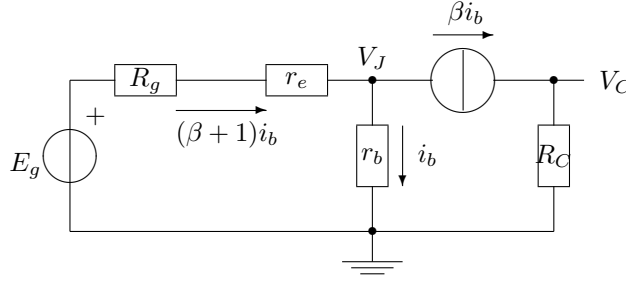


Fig. 6.9

Questo circuito ha due nodi. Quindi per risolverlo basta una sola equazione al nodo  $V_J$ . Scriviamola.

$$\frac{V_J - E_g}{R_g + r_e} + \frac{V_J}{r_b} + \beta i_b = 0 \quad \text{con} \quad i_b = \frac{V_J}{r_b}.$$

Da qui ricaviamo  $V_J$ , poi  $i_b$  e possiamo calcolare tutto del circuito.

$$V_J \left( \frac{1}{R_g + r_e} + \frac{\beta + 1}{r_b} \right) = E_g \frac{1}{R_g + r_e}$$

$$V_J = r_b \frac{E_g}{r_b + (\beta + 1)(R_g + r_e)}$$

da cui

$$i_b = \frac{E_g}{r_b + (\beta + 1)(R_g + r_e)}$$

Noto  $i_b$  si ricava:

$$i_e = (\beta + 1)i_b = (\beta + 1) \frac{E_g}{r_b + (\beta + 1)(R_g + r_e)} = \frac{E_g}{\frac{r_b}{\beta + 1} + r_e + R_g}$$

$i_e$  é la corrente che scorre nel circuito d'ingresso. Calcoliamo l'impedenza d'ingresso del circuito CB:

$$\frac{E_g}{i_e} = R_g + r_e + \frac{r_b}{\beta + 1} = R_g + Z_{IN}$$

che risulta essere

$$Z_{IN} = r_e + \frac{r_b}{\beta + 1}.$$

Calcoliamo ora  $i_c$ :

$$i_c = \beta i_b = \frac{\beta E_g}{r_b + (\beta + 1)(R_g + r_e)} = \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{E_g}{R_g + Z_{IN}} = \alpha \frac{E_g}{R_g + Z_{IN}} = \alpha i_e$$

come era prevedibile per un transistor in configurazione CB.  $\alpha$  é il parametro del transistor ed é, come abbiamo già visto, un numero appena minore di 1.

Calcoliamo ora il segnale d'uscita  $V_C$ .

$$V_C = i_c R_C = \alpha i_e R_C = \alpha \frac{E_g}{R_g + Z_{IN}} R_C = \alpha E_g \frac{R_C}{R_g + Z_{IN}}$$

Il guadagno (o amplificazione) in tensione dello stadio CB é:

$$G_V = \frac{V_C}{E_g} = \alpha \frac{R_C}{R_g + Z_{IN}}$$

Abbiamo calcolato tutti i dati necessari per costruire il circuito equivalente di Thevenin dello stadio CB. Il circuito, che avevamo disegnato in figura 6.9, diviene ora quello di figura 6.10:

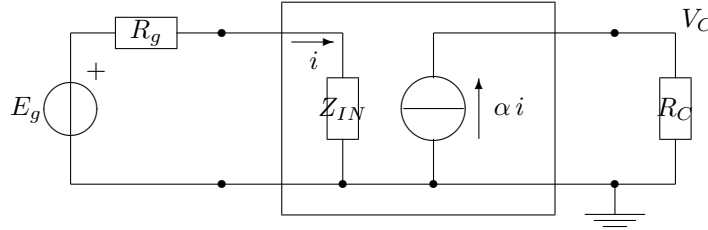


Fig. 6.10

Lo stadio CB é un generatore reale di corrente comandato di corrente. L'impedenza d'ingresso é  $Z_{IN}$ . L'impedenza d'uscita  $Z_{OUT}$  é infinita. Il guadagno di corrente  $G_I$  é  $\alpha$ .

Un transistor tipico ha:  $\beta = 100$ ,  $r_b = 200\Omega$ ,  $r_e = 5\Omega$  con  $I_E = 5mA$ . Con questi valori  $Z_{IN} = 5 + \frac{200}{100}\Omega = 7\Omega$ . Quindi lo stadio CB presenta un'impedenza d'ingresso piccola, del valore di pochi ohm. Ricordiamo che nel passare dal circuito di figura 6.8 a quello di figura 6.9 avevamo fatto un'approssimazione: avevamo eliminato la resistenza  $R_E$ . Ora vediamo che la  $R_E$  é in parallelo alla piccola impedenza  $Z_{IN}$ ; quindi l'approssimazione fatta é del tutto giustificata.

Possiamo ora calcolare la risposta del circuito di figura 6.7. Il guadagno  $G_V$  dello stadio CB vale:

$$G_V = \alpha \frac{R_C}{R_g + Z_{IN}} = 0.99 \frac{1.2K\Omega}{100\Omega + 7\Omega} = 11.1.$$

Al segnale di 100mV picco-picco in ingresso corrisponde in uscita un segnale di 1.11V picco-picco.

Possiamo fare la seguente considerazione circa il guadagno  $G_V$ . Assumendo  $\alpha = 1$  e  $Z_{IN}$  trascurabile rispetto a  $R_g$ , il guadagno  $G_V$  é dato dal rapporto  $R_C/R_g$ . Quindi possiamo scrivere per lo stadio CB:  $G_V \approx R_C/R_g$ .

### 6.7.2 Configurazione a collettore comune CC

In figura 6.11 disegniamo un semplice circuito con un transistor NPN in configurazione CC.

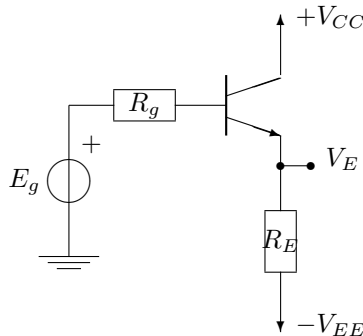


Fig. 6.11

Il circuito del transistor comprende il resistore  $R_E$ , collegato a  $-V_{EE}$ . Il collettore é collegato a  $+V_{CC}$ . Gli alimentatori di tensione sono indicati con  $-V_{EE}$  e  $+V_{CC}$ , rispettivamente di  $-12V$  e  $+12V$ .

Il segnale viene fornito da una sorgente lineare con generatore ideale di tensione  $E_g$  e con resistore serie  $R_g$ , di  $50\Omega$ .  $E_g(t)$  sia un generatore sinusoidale che produce un segnale di  $100mV$  picco-picco a  $10KHz$ . Vogliamo calcolare  $V_E$ .

### Calcolo della polarizzazione del circuito

Poniamo che  $E_g$  sia a  $0$  Volt. La corrente di base é piccola e sul resistore  $R_g$  non provoca una caduta apprezzabile. Pertanto col transistor in conduzione  $V_E$  é a  $\approx -0.6V$ . Diamo al transistor una corrente di polarizzazione di  $5mA$ .  $R_E$  risulta essere di  $2.2K\Omega$ . Il transistor abbia un  $\beta = 100$ . La corrente di base  $I_B$  vale:  $I_E/\beta = 5mA/100 = 50\mu A$ . La caduta su  $R_g$  vale:  $50\Omega \cdot 50\mu A = 2.5mV$ ; pertanto l'assunzione che la caduta non sia apprezzabile é valida.

Abbiamo dimensionato il circuito; ora calcoliamone le caratteristiche.

### Circuito equivalente di Thevenin per la configurazione CC

Disegniamo lo schema equivalente del circuito per i piccoli segnali spegnendo gli alimentatori, che vengono sostituiti con un cortocircuito a massa (applicazione del teorema della sovrapposizione). Ovviamente al transistor sostituiamo il suo circuito equivalente per piccoli segnali. Iniziamo da  $E_g$  e proseguiamo lungo il circuito. Attraversata  $R_g$  si entra dalla base nel transistor. Si trova il resistore  $r_b$  che porta alla giunzione. Lungo il cammino del collettore si incontra il generatore di corrente, che va a massa perché l'alimentatore  $+V_{CC}$  é spento. Lungo il cammino dell'emettitore si incontra  $r_e$  e poi all'esterno del transistor  $R_E$ , che va a massa.

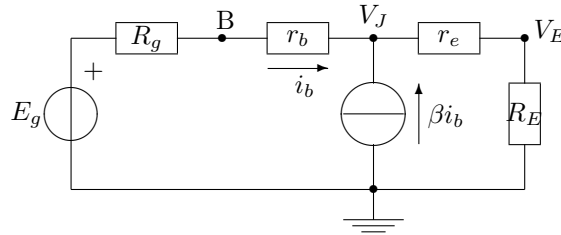


Fig. 6.12

Questo circuito ha due nodi. Quindi per risolverlo basta una sola equazione al nodo  $V_J$ . Scriviamola.

$$\frac{V_J - E_g}{R_g + r_b} + \frac{V_J}{R_E + r_e} - \beta i_b = 0 \quad \text{con} \quad i_b = -\frac{V_J - E_g}{R_g + r_b}$$

Da qui ricaviamo  $V_J$ , poi  $i_e$  e possiamo calcolare tutto del circuito.

$$\begin{aligned} \frac{(\beta + 1)(V_J - E_g)}{R_g + r_b} + \frac{V_J}{R_E + r_e} &= 0 \\ V_J \left( \frac{\beta + 1}{R_g + r_b} + \frac{1}{R_E + r_e} \right) &= \frac{(\beta + 1)E_g}{R_g + r_b} \\ V_J &= \frac{(\beta + 1)E_g(R_E + r_e)}{R_g + r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e)} \\ i_e = (\beta + 1)i_b &= \frac{V_J}{R_E + r_e} = \frac{(\beta + 1)E_g}{R_g + r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e)} \end{aligned}$$

$$i_b = \frac{E_g}{R_g + r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e)}$$

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore  $E_g$ .

$$\frac{E_g}{i_b} = R_g + r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e) = R_g + Z_{IN}$$

da cui risulta appunto che l'impedenza d'ingresso dello stadio CC vale:

$$Z_{IN} = r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e).$$

Calcoliamo il segnale d'uscita  $V_E$ .

$$V_E = i_e \cdot R_E = \frac{(\beta + 1)E_g R_E}{R_g + r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e)}$$

da cui ricaviamo il guadagno in tensione  $G_V$  dello stadio CC:

$$G_V = \frac{V_E}{E_g} = \frac{(\beta + 1)R_E}{R_g + r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e)}$$

Possiamo riscriverlo cosí:

$$G_V = \frac{R_E}{\frac{R_g + r_b}{(\beta + 1)} + R_E + r_e} \approx \frac{R_E}{R_E + r_e} \approx 1.$$

Infatti con  $R_g$  paragonabile a  $r_b$ , il termine  $\frac{R_g + r_b}{(\beta + 1)}$  diviene trascurabile rispetto a  $R_E + r_e$  e pertanto il guadagno  $G_V$  risulta circa 1.

Riscriviamo ed elaboriamo il rapporto che dá il guadagno:

$$\frac{V_E}{E_g} = \frac{(\beta + 1)R_E}{R_g + r_b + (\beta + 1)(R_E + r_e)} = \frac{R_E}{\frac{R_g + r_b}{(\beta + 1)} + r_e + R_E} = \frac{R_E}{Z_{OUT} + R_E}$$

con

$$Z_{OUT} = \frac{R_g + r_b}{(\beta + 1)} + r_e$$

Consideriamo il semplice circuito disegnato qui di seguito (figura 6.13):

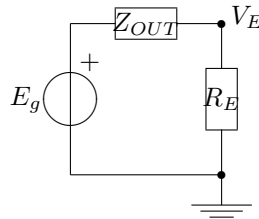


Fig. 6.13

Questo circuito dá esattamente il rapporto  $\frac{V_E}{E_g}$  scritto sopra. Esso rappresenta il circuito equivalente visto dall'uscita.

Abbiamo calcolato tutti i dati necessari per costruire il circuito equivalente di Thevenin dello stadio CC. Il circuito, che avevamo disegnato in figura 6.12, diviene ora quello di figura 6.14:

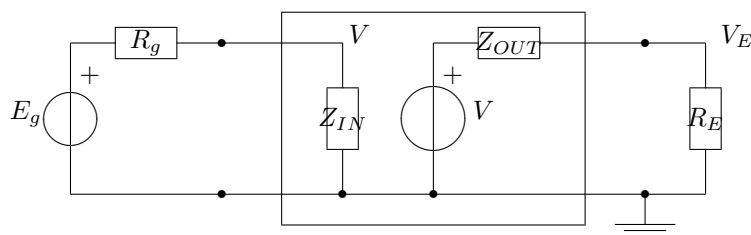


Fig. 6.14

Il circuito equivalente dello stadio CC é un generatore reale di tensione comandato di tensione. Presenta un'impedenza d'ingresso elevata e un'impedenza d'uscita molto bassa. Il guadagno in tensione  $G_V$  vale circa 1. Il guadagno in corrente  $G_I = \beta + 1$ .

Lo stadio CC viene anche indicato con nome di "emitter follower", perché il segnale sull'emettitore segue fedelmente il segnale presente sulla base. Questo stadio, interposto fra una sorgente ( $E_g$ ) ed un carico ( $R_E$ ), ha questi effetti. La sorgente vede un carico approssimativamente moltiplicato per  $\beta$ , quindi deve erogare meno potenza rispetto alla connessione diretta. Il carico vede una sorgente con una impedenza interna più bassa e capace di erogare maggiore potenza rispetto alla connessione diretta.

Calcoliamo  $Z_{OUT}$  per il circuito di figura 6.11. Abbiamo:  $R_g = 50\Omega$ ,  $r_b = 200\Omega$ ,  $r_e = 5\Omega$  con una corrente  $I_E = 5mA$ ,  $\beta = 100$ . Risulta:  $Z_{OUT} = 5 + (50 + 200)/100\Omega = 7.5\Omega$ . Nel caso che fosse  $R_g = 1K\Omega$ ,  $Z_{OUT} = 5 + (1000 + 200)/100\Omega = 17\Omega$ . Ecco un vantaggio dello stadio CC.

### 6.7.3 Configurazione a emettitore comune CE

In figura 6.15 disegniamo un semplice circuito con un transistor NPN in configurazione CE.

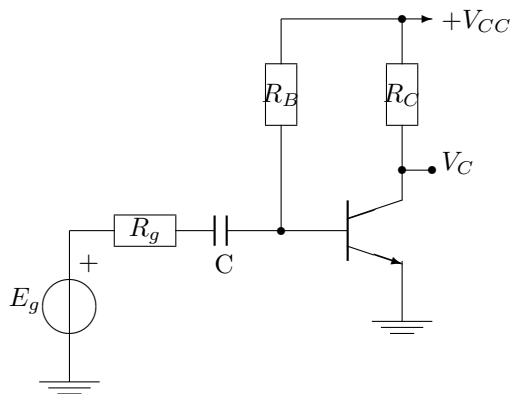


Fig. 6.15

Il circuito del transistor comprende i due resistori  $R_B$  e  $R_C$ , collegati all'alimentatore di tensione  $+V_{CC}$ , di  $+12V$ .

Il segnale viene fornito da una sorgente lineare con generatore ideale di tensione  $E_g$  e con resistore serie  $R_g$ , di  $500\Omega$ .  $E_g(t)$  sia un generatore sinusoidale che produce un segnale di  $10mV$  picco-picco a  $100KHz$ . Fra il generatore e il transistor é inserito il condensatore  $C$ , che ha il compito di non far passare per il generatore la corrente di polarizzazione del transistor. Si dice che il condensatore separa la corrente continua fra le due parti del circuito. Scegliremo per  $C$  un valore di capacità tale che renda trascurabile



la sua impedenza a 100KHz.

Vogliamo calcolare il segnale  $V_C(t)$  in uscita.

### Calcolo della polarizzazione del circuito

Decidiamo di porre una corrente di polarizzazione di collettore  $I_{CP}$  di 5mA e scegliamo per  $R_C$  un valore di  $1.2K\Omega$  in modo che  $V_{CP}$  sia posizionato a +6V. La corrente di polarizzazione di base deve essere:  $I_{CP}/\beta = 5mA/100 = 50\mu A$ . Questa corrente di polarizzazione viene fornita dal resistore  $R_B$ . La caduta di tensione su  $R_B$  vale:  $12V - 0.6V = 11.4V$ . Allora  $R_B = 11.4V/50\mu A = 220K\Omega$ . Per il condensatore C con i soliti criteri scegliamo un valore di  $2\mu F$ .

Abbiamo dimensionato il circuito; ora calcoliamone le caratteristiche.

### Circuito equivalente di Thevenin per la configurazione CE

Disegniamo lo schema equivalente del circuito per i piccoli segnali spegnendo l'alimentatore, che viene sostituito con un cortocircuito a massa (applicazione del teorema della sovrapposizione). Ovviamente al transistor sostituiamo il suo circuito equivalente per piccoli segnali. Iniziamo da  $E_g$  e proseguiamo lungo il circuito. Attraversata  $R_g$  c'è  $R_B$  che va a massa, poi si entra dalla base nel transistor. Si trova il resistore  $r_b$  che porta alla giunzione. Lungo il cammino del collettore si incontra il generatore di corrente, seguito dal resistore  $R_C$  che va a massa perché l'alimentatore  $+V_{CC}$  è spento. Lungo il cammino dell'emettitore si incontra  $r_e$ , che va a massa.

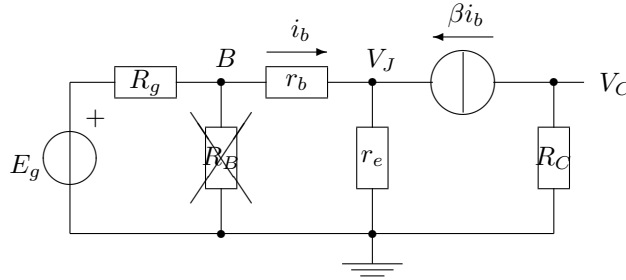


Fig. 6.16

Il resistore  $R_B$  ha una resistenza molto elevata rispetto sia a  $R_g$  sia, come vedremo, rispetto alla impedenza d'ingresso del transistor; perciò possiamo trascurarlo. Questo circuito ha due nodi. Quindi per risolverlo basta una sola equazione al nodo  $V_J$ . Scriviamola.

$$\frac{V_J - E_g}{R_g + r_b} + \frac{V_J}{r_e} - \beta i_b = 0 \quad \text{con} \quad i_b = -\frac{V_J - E_g}{R_g + r_b}$$

Da qui ricaviamo  $V_J$ , poi  $i_b$  e possiamo calcolare tutto del circuito.

$$\begin{aligned} (\beta + 1) \frac{V_J - E_g}{R_g + r_b} + \frac{V_J}{r_e} &= 0 \\ V_J \left( \frac{\beta + 1}{R_g + r_b} + \frac{1}{r_e} \right) &= \frac{(\beta + 1)E_g}{R_g + r_b} \\ V_J &= \frac{(\beta + 1)r_e E_g}{R_g + r_b + (\beta + 1)r_e} \\ i_e = (\beta + 1)i_b = \frac{V_J}{r_e} &= \frac{(\beta + 1)E_g}{R_g + r_b + (\beta + 1)r_e} \\ i_b &= \frac{E_g}{R_g + r_b + (\beta + 1)r_e} \end{aligned}$$

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore  $E_g$ .

$$\frac{E_g}{i_b} = R_g + r_b + (\beta + 1)r_e = R_g + Z_{IN}$$

da cui risulta appunto che l'impedenza d'ingresso dello stadio CE vale:

$$Z_{IN} = r_b + (\beta + 1)r_e.$$

Calcoliamo il segnale d'uscita  $V_C$ .

$$V_C = -\beta i_b \cdot R_C = -\frac{\beta R_C E_g}{R_g + r_b + (\beta + 1)r_e}$$

da cui ricaviamo il guadagno in tensione  $G_V$  dello stadio CE:

$$G_V = \frac{V_C}{E_g} = -\frac{\beta R_C}{R_g + r_b + (\beta + 1)r_e}$$

Possiamo riscriverlo così:

$$G_V = -\frac{\beta}{\beta + 1} \frac{R_C}{\frac{R_g + r_b}{(\beta + 1)} + r_e} \approx -\frac{R_C}{r_e}.$$

Infatti con  $R_g$  paragonabile a  $r_b$ , il termine  $\frac{R_g + r_b}{(\beta + 1)}$  diviene piccolo rispetto a  $r_e$  e pertanto il guadagno  $G_V$  risulta approssimativamente  $-\frac{R_C}{r_e}$ .

Il guadagno in corrente  $G_I$  vale  $-\beta$ .

Lo stadio CE é rappresentato dal seguente circuito equivalente di Thevenin (figura 6.17).

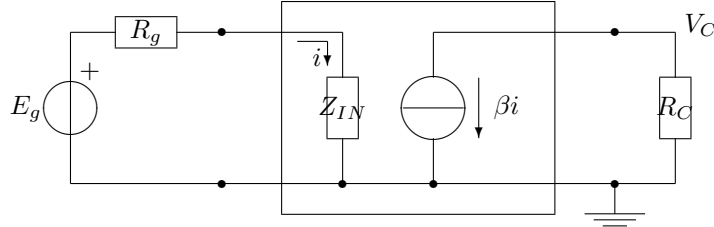


Fig. 6.17

Il circuito equivalente dello stadio CE é un generatore reale di corrente comandato di corrente. Presenta un'impedenza d'ingresso medio-bassa e un'impedenza d'uscita infinita, tipica del generatore di corrente. Il guadagno in tensione  $G_V$  é elevato, anche attorno al migliaio. Il guadagno in corrente  $G_I$  é il  $\beta$  del transistor.

Notiamo che lo stadio CE presenta sia guadagno di tensione sia guadagno di corrente. Quindi é lo stadio che presenta in assoluto il maggior guadagno complessivo.

Calcoliamo la risposta del circuito di figura 6.15 con i dati di polarizzazione stabiliti:  $R_C = 1.2K\Omega$  e  $I_C = 5mA$ . I parametri del transistor sono:  $r_b = 200\Omega$ ,  $r_e = 5\Omega$ ,  $\beta = 100$ . Il guadagno in tensione risulta:  $G_V = 99$ . L'impedenza d'ingresso risulta:  $Z_{IN} = 705\Omega$ .

## 6.8 Raffronto fra le tre configurazioni

Riportiamo nella tabella che segue le caratteristiche di guadagno per le tre configurazioni, aggiungendo anche il guadagno di potenza  $G_P (= G_V \cdot G_I)$ , nonché le impedenze d'ingresso e d'uscita.

Config.	$G_V$	$G_I$	$G_P$	$Z_{IN}$	$Z_{OUT}$
CB	$\approx \frac{R_C}{R_g}$	$\approx 1$	$\approx \frac{R_C}{R_g}$	$r_e + \frac{r_b}{\beta+1}$	$\infty$
CC	$\approx 1$	$\beta + 1$	$\beta + 1$	$r_b + (\beta + 1)(r_e + R_E)$	$r_e + \frac{r_b + R_g}{\beta + 1}$
CE	$\approx -\frac{R_C}{r_e}$	$-\beta$	$\approx \frac{R_C}{r_e}\beta$	$r_b + (\beta + 1)r_e$	$\infty$

Notiamo innanzitutto che le caratteristiche di risposta degli stadi CB, CC, CE dipendono in maggiore o minore misura dai parametri del transistor, i quali a loro volta dipendono dalla temperatura e dalla corrente nel transistor. Pertanto tali caratteristiche nelle applicazioni reali sono soggette a variazione con la temperatura e a nonlinearità con la corrente. Delle tre configurazioni, la configurazione CB risulta la meno instabile, seguita da vicino dalla configurazione CC. La configurazione CE, ancorché la più interessante per il maggior guadagno che consente, è certamente la meno stabile, in particolare per quanto riguarda il punto di lavoro. Quindi, usati singolarmente, questi stadi a transistor non consentono alte precisioni. Vedremo nel seguito con quali tecniche è possibile ovviare a queste difficoltà.

## 6.9 Transistor collegati in coppia

### Coppia Darlington

La coppia Darlington è presentata in figura 6.18.

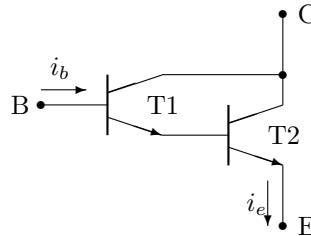


Fig. 6.18

I due transistor così accoppiati compongono un supertransistor, di cui in figura sono indicati con E, B, C rispettivamente emettitore, base, collettore. Valutiamo il guadagno in corrente di questo nuovo transistor. Sia  $\beta_1$  per T1,  $\beta_2$  per T2. La corrente, che esce dall'emettitore di T1 e che entra nella base di T2, è:  $(\beta_1 + 1)i_b$ . La corrente che esce dall'emettitore di T2 è:  $i_e = (\beta_2 + 1)(\beta_1 + 1)i_b$ . Pertanto:

$$\frac{i_e}{i_b} = \beta_s + 1 = (\beta_2 + 1)(\beta_1 + 1).$$

dove con  $\beta_s$  indichiamo il  $\beta$  del supertransistor. Abbiamo realizzato un transistor con un  $\beta$  molto elevato. La  $V_{BE}$  di questo supertransistor è doppia rispetto a quella di un singolo transistor, in quanto abbiamo due giunzioni B-E di T1 e di T2 in cascata.

Se vengono accoppiati due transistor NPN, il supertransistor sarà un NPN. Analogamente, se vengono accoppiati due transistor PNP, il supertransistor sarà un PNP.

### Coppia Sziklay

In figura 6.19 sono presentate le due coppie Sziklay NPN e PNP.

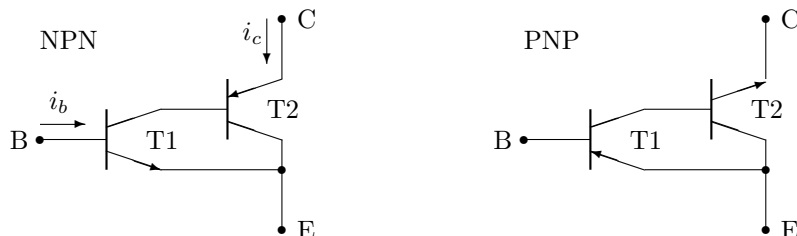


Fig. 6.19

Anche in questo caso i due transistor accoppiati compongono un supertransistor, di tipo NPN se T1 è di tipo NPN, di tipo PNP se T1 è di tipo PNP: quindi il tipo di T1 determina il tipo del supertransistor. Ovviamente il tipo di T2 è complementare al tipo di T1.

Valutiamo il guadagno in corrente di questo nuovo transistor. Consideriamo il tipo NPN. Sia  $\beta_1$  per T1,  $\beta_2$  per T2. La corrente, che entra nel collettore di T1 e che esce dalla base di T2, è:  $\beta_1 i_b$ . La corrente, che entra nell'emettitore di T2 e che è la  $i_c$  del super transistor, è:  $i_c = \beta_1(\beta_2 + 1)i_b$ . Per cui:

$$\frac{i_c}{i_b} = \beta_s = \beta_1(\beta_2 + 1)$$

dove con  $\beta_s$  indichiamo il  $\beta$  del supertransistor. Abbiamo realizzato un transistor con un  $\beta$  molto elevato. La  $V_{BE}$  di questo supertransistor è quella del singolo transistor T1.

### Coppia differenziale

In figura 6.20 è rappresentata la coppia differenziale formata dai due transistor T1 e T2, direttamente accoppiati d'emettitore e che considereremo identici, cioè con gli stessi parametri interni.  $e_1$  ed  $e_2$  sono le tensioni agli ingressi. U1 e U2 sono le tensioni d'uscita.

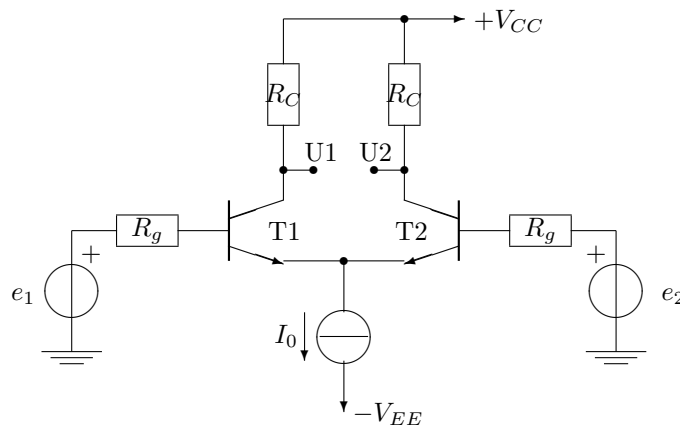


Fig. 6.20

Per funzionare in condizioni di linearità  $\Delta e = e_1 - e_2$  deve stare nell'intervallo di pochi  $mV$ . La più importante funzione di questo circuito è di rivelare piccoli scostamenti fra le due tensioni  $e_1$  ed  $e_2$ . Per questo motivo passiamo subito a studiarne il comportamento per piccoli segnali, ricavando il circuito equivalente che presentiamo nella figura 6.21.

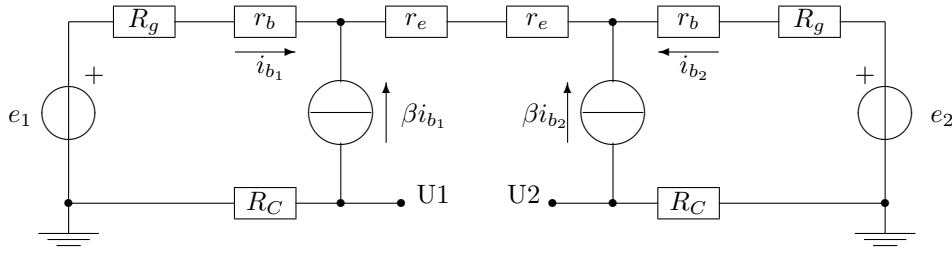


Fig. 6.21

Usando la relazione  $i_e = i_c + i_b$  e la linearit , il circuito equivalente diventa quello di figura 6.22 per il calcolo della corrente  $i$ :

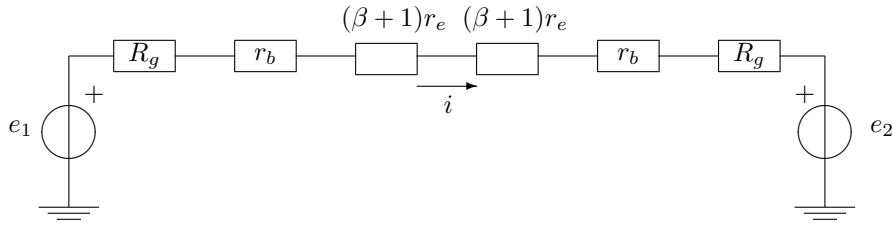


Fig. 6.22

Da questo circuito   immediato calcolare  $i$ :

$$i = \frac{e_1 - e_2}{2(R_g + r_b + (\beta + 1)r_e)}.$$

Essendo  $i_{b1} = i$  e  $i_{b2} = -i$ ,   immediato calcolare le uscite U1 e U2:

$$U1 = -R_C \beta i_{b1} = -R_C \beta i = -\frac{R_C}{2(R_g + r_b + (\beta + 1)r_e)} \cdot (e_1 - e_2)$$

$$U2 = -R_C \beta i_{b2} = R_C \beta i = \frac{R_C}{2(R_g + r_b + (\beta + 1)r_e)} \cdot (e_1 - e_2)$$

Quindi  :  $U2 = -U1$ . Se i due transistor sono identici e identicamente polarizzati, sulle due uscite   presente un segnale che d  amplificata la differenza fra le tensioni d'ingresso. Di qui il nome del circuito.

## 6.10 Considerazioni aggiuntive

I transistor sono percorsi da corrente in una sola direzione, quella positiva indicata dal senso della freccia sull'emettitore. Questo fatto ha importanti e serie conseguenze.

### Configurazione CE

Consideriamo il circuito di figura 6.23, dove   usato un transistor NPN in configurazione CE. Il transistor   pilotato con un impulso  $i$  di corrente sulla base. Sull'uscita   disegnato il condensatore C, che rappresenta capacit  reale e parassita locale. Vediamo la risposta  $V_C$  sul collettore.

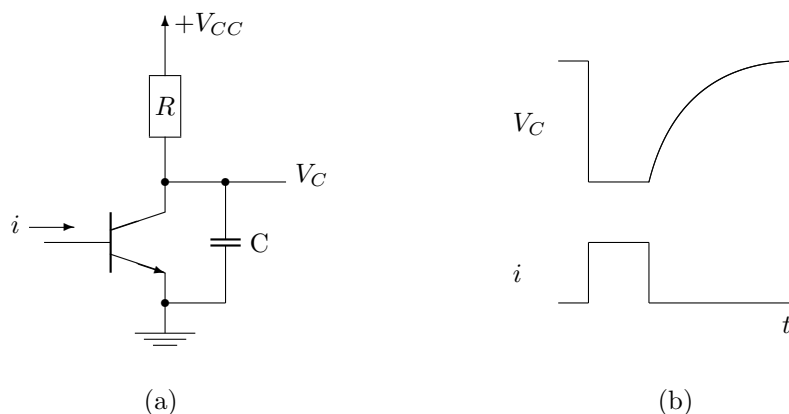


Fig. 6.23

Nella figura 6.23b sono disegnati i segnali in ingresso e in uscita. In corrispondenza dell'impulso di corrente l'uscita produce il segnale invertito e amplificato. Come termina l'impulso in ingresso, il transistor non invia più corrente. Il punto  $V_C$  risale verso  $+V_{CC}$  con andamento determinato dalla costante  $RC$  di collettore, come se il transistor non fosse più collegato. Quindi il segnale d'uscita solo in parte è una replica corretta e amplificata del segnale d'ingresso.

Usando un transistor PNP avremmo una situazione complementare.

### Configurazione CC

Consideriamo il circuito di figura 6.24, dove è usato un transistor NPN in configurazione CC. Il transistor è pilotato con un impulso  $E_g$  di tensione sulla base. Sull'uscita è disegnato il condensatore C, che rappresenta capacità reale e parassita locale. Vediamo la risposta  $V_E$  sull'emettitore.

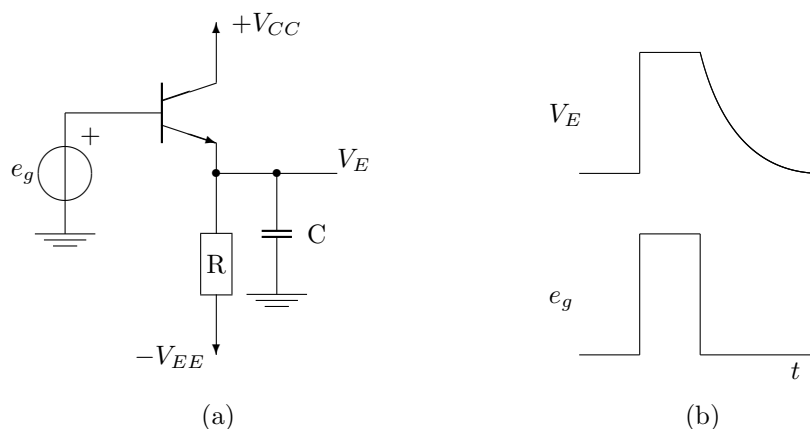


Fig. 6.24

Nella figura 6.24b sono disegnati i segnali in ingresso e in uscita. In corrispondenza dell'impulso di tensione l'uscita produce il segnale che replica l'ingresso. Come termina l'impulso in ingresso, il transistor non invia più corrente: anzi, il diodo B-E si inverte. Il punto  $V_C$  scende verso massa con andamento determinato dalla costante  $RC$  di emettitore, come se il transistor non fosse più collegato. Quindi il segnale d'uscita solo in parte è una replica corretta del segnale d'ingresso.

Usando un transistor PNP avremmo una situazione complementare.

**Soluzione con transistor complementari**

Consideriamo la figura 6.25, che realizza un inseguitore di emettitore realizzato con due transistor complementari, un NPN e un PNP, interconnessi fra loro. E' presente una rete di polarizzazione (RdP), che controlla la polarizzazione statica dei transistor.

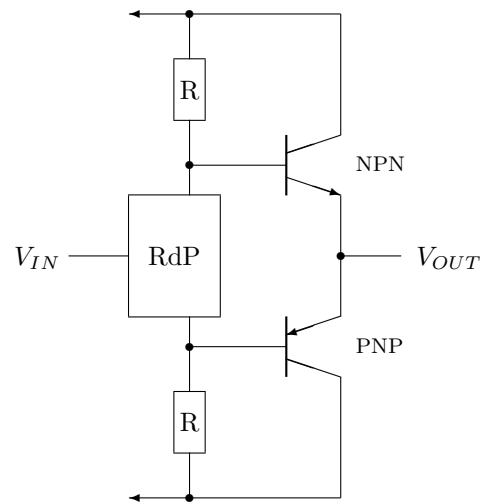


Fig. 6.25

Con questo circuito il segnale in uscita é la replica del segnale d'ingresso. Sul fronte positivo del segnale é attivo il transistor NPN; sul fronte negativo é attivo il transistor PNP.





## Capitolo 7

# Il transistor a effetto di campo (FET)

Un secondo tipo di transistor é quello che si chiama transistor ad effetto di campo (FET, acronimo del nome inglese *field effect transistor*), in cui funzionamento dipende dal controllo della corrente da parte di un campo elettrico. Esistono due grandi famiglie di FET, quella dei FET a giunzione o JFET (detti semplicemente FET) e quella dei FET a gate isolato o IGFET, che poi si articola in varie sottoclassi (MOSFET, MESFET, ecc.).

### 7.1 Il FET a giunzione (o JFET)

La struttura di un FET a canale  $n$  é presentata schematicamente nella figura 7.1 insieme col simbolo circuitale.

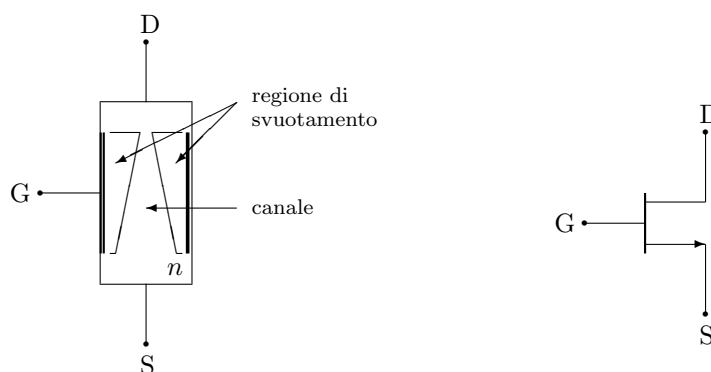


Fig. 7.1

Idealmente, un cilindretto di Silicio di tipo  $n$  viene drogato intensamente e superficialmente su una sottile corona cilindrica laterale (indicata in figura 7.1 con tratto spesso) in modo da formare uno strato di tipo  $p^+$ . Questa zona viene connessa all'esterno con l'elettrodo G (dall'inglese *gate* = porta). Le due basi del cilindretto sono collegate con contatti ohmici verso l'esterno, rispettivamente con S (dall'inglese *source* = sorgente) e D (dall'inglese *drain* = pozzo). L'elettrodo S corrisponde all'emettitore del transistor BJT e l'elettrodo D al collettore. La zona compresa fra S e D é il *canale*, che ha una certa resistenza elettrica.

Se connettiamo insieme D e S, fra G e D, oppure fra G e S, abbiamo una giunzione *pn* e quindi un diodo con l'anodo in G.

## 7.2 Curve caratteristiche del FET

Vediamo il funzionamento del FET. Essendo un FET a canale *n* può scorrere corrente positiva dal drain D al source S. Pertanto D deve essere a tensione positiva rispetto a S. Nel canale scorre allora la corrente  $I_D$ , determinata dalla resistenza del canale. Poniamo il gate G alla stessa tensione di S. Poiché lungo il canale la tensione aumenta progressivamente da S a D per effetto della resistenza del canale, la giunzione viene progressivamente invertita e di fronte al gate G si crea una regione di svuotamento, che si allarga a mano a mano che si va verso D. Perciò il canale si riduce e aumenta la sua resistenza. Se a questo punto al gate G applichiamo una piccola tensione negativa rispetto a S, la zona di svuotamento si allarga ulteriormente e la resistenza del canale aumenta ancora. Quindi a tensione di D costante la corrente  $I_D$  è funzione della tensione di gate. La dizione "effetto di campo" è usata per indicare che il controllo della corrente  $I_D$  è l'effetto della estensione del campo elettrico associato alla regione di svuotamento.

Tracciamo ora le curve caratteristiche di un FET. In figura 7.2 sono disegnati: lo schema dell'apparato di misura; le curve caratteristiche  $I_D$  versus  $V_{DS}$  in funzione del parametro  $V_{GS}$ .

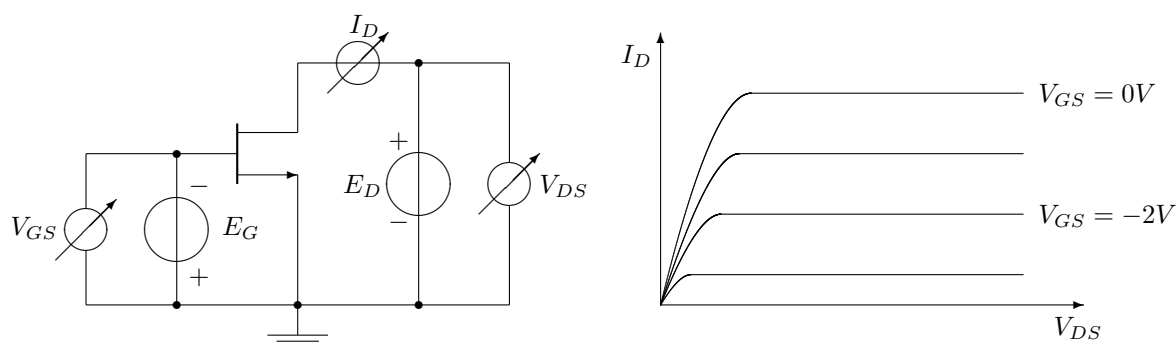


Fig. 7.2

Osservando le curve del FET si nota un'importante analogia con quelle del transistor BJT. Esiste una zona in cui le caratteristiche sono orizzontali, parallele all'asse  $V_{DS}$ : oltre un certo valore di  $V_{DS}$  la corrente  $I_D$  è indipendente da  $V_{DS}$  e dipende unicamente da  $V_{GS}$ . In questa zona il canale è in *pinch-off* (= pizzicato) e il FET funziona da generatore reale di corrente comandato di tensione. Esiste poi una tensione  $V_{GS0}$  al di sotto della quale il FET è spento.

Ovviamente esiste anche il FET a canale *p*. Il suo comportamento è del tutto analogo a quello del FET a canale *n* salvo che va invertita la polarità delle tensioni e delle correnti. Anche con i FET è possibile costruire strutture complementari, combinando FET a canale *p* con FET a canale *n*.

## 7.3 Circuito equivalente del FET

C'è una differenza radicale fra transistor BJT e FET. Nel BJT la connessione B-E presenta un diodo polarizzato direttamente con passaggio di corrente di base, che circola nel circuito d'ingresso. Nel FET la connessione G-S presenta un diodo polarizzato inversamente; quindi un'impedenza molto elevata ed una corrente trascurabile, la corrente inversa di saturazione del diodo, che non influenza apprezzabilmente il circuito d'ingresso. Ricordiamo che un diodo in polarizzazione inversa presenta una capacità di transizione. Ecco allora che nel FET sono presenti due capacità: una capacità  $C_{GS}$  e una capacità  $C_{GD}$ ,

comunque molto piccole, ma che si manifestano alle frequenze molto alte.

Bisogna poi considerare che le caratteristiche nel tratto cosiddetto orizzontale presentano una lieve pendenza residua, il che significa che é presente una resistenza residua di canale  $r_d$ , di valore elevato.

Ovviamente anche il FET va polarizzato. Va scelto un punto di lavoro, con tecniche e considerazioni che già abbiamo trattato per il transistor bipolare.

Possiamo ora disegnare lo schema del circuito equivalente del FET per piccoli segnali attorno al punto di lavoro (figura 7.3).

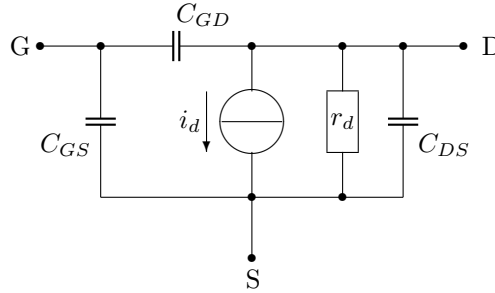


Fig. 7.3

L'espressione che dá  $i_d$  é la seguente:

$$i_d = g_m \cdot v_{GS}$$

dove  $g_m$  é la transconduttanza del FET, il parametro che ne caratterizza il guadagno come generatore di corrente comandato di tensione.

## 7.4 Le tre configurazioni di utilizzo del FET

In perfetta analogia con quanto visto per il transistor BJT, anche il FET viene usato in tre configurazioni, dette Common Source (CS), Common Gate (CG), Common Drain (CD). Per esemplificazione e per semplicitá ci limitiamo a considerare soltanto la configurazione CS.

In figura 7.4 é disegnato un circuito con un FET a canale  $n$  in configurazione CS.

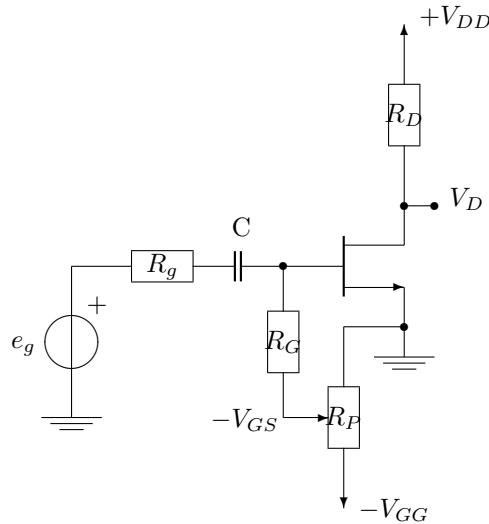


Fig. 7.4

Nello schema di figura 7.4 é disegnato il resistore  $R_G$ , la cui funzione é quella di polarizzare il gate del FET, regolando il potenziometro  $R_P$  alla tensione  $-V_{GS}$  del punto di lavoro. Il valore di  $R_G$  é scelto nell'ordine della decina di megaohm, perché la corrente di gate é trascurabile e per non caricare il generatore  $e_g$ . Anche  $R_D$  é scelto in base al punto di lavoro. Il condensatore  $C$  disaccoppia la continua. Disegniamo in figura 7.5 il circuito equivalente del circuito di figura 7.4 nell'ipotesi che non si operi alle alte frequenze, per cui i condensatori  $C_{GS}$  e  $C_{GD}$  non compaiono.

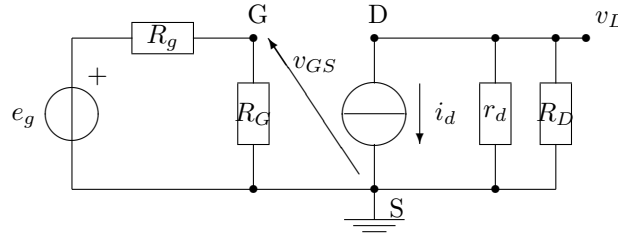


Fig. 7.5

Scriviamo le equazioni che risolvono il circuito.

$$v_{GS} = e_g \frac{R_G}{R_G + R_g} \quad v_D = -i_d(r_d || R_D) \quad i_d = g_m \cdot v_{GS}$$

Poiché normalmente  $R_G \gg R_g$  e  $r_d \gg R_D$  ne viene che  $v_{GS} = e_g$  e:

$$v_D = -g_m R_D e_g.$$

## 7.5 Paragone fra transistor BJT e FET

- Il FET opera con portatori di un solo tipo; perciò é un dispositivo unipolare.
- Il FET presenta un'elevatissima impedenza d'ingresso sul gate.
- Il FET presenta minor rumore elettrico.
- Il FET ha una minore instabilità termica.
- Il FET é meno sensibile al danno da radiazione.
- Il FET non presenta tensione di offset in uscita.
- Il BJT é piú veloce.
- Il BJT occupa un minor volume e consente circuiti integrati piú compatti.

## 7.6 Cenno ai transistor IGFET

Una varietà di transistor a effetto di campo del tipo IGFET é il FET a Metallo-Ossido-Semiconduttore, brevemente detto MOSFET. Esso é ottenuto unicamente depositando e incidendo strati successivi su un substrato drogato. Questo procedimento facilita la fabbricazione su larga scala di componenti complessi ed é alla base dell'ampio utilizzo che ne viene fatto nei moderni circuiti digitali. In figura 7.6 é illustrato schematicamente un MOSFET a canale  $n$ .

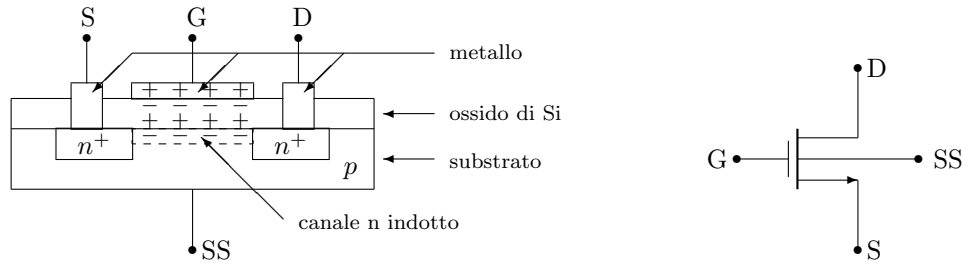


Fig. 7.6

Sul substrato SS di tipo  $p$  vengono drogate due zone  $n^+$ ; poi viene depositato uno strato di  $SiO_2$ , in cui vengono praticati due fori in corrispondenza delle zone  $n^+$  e viene depositato del metallo (Al) per fare le connessioni elettriche. Vengono connessi gli elettrodi S, G, D, SS. Si vede che il gate è separato dalla zona dei semiconduttori con l'interposizione di ossido di Silicio  $SiO_2$ , altamente isolante. Di qui il nome di gate isolato (IG). La resistenza del gate è dell'ordine di  $10^{10} \div 10^{15}$  ohm.

**Funzionamento.** SS è di norma connesso a S. Se G è al potenziale di S con D positivo, c'è simmetria e le cariche non si muovono. Ma se G è fatto positivo rispetto a S, si inducono cariche nel condensatore associato al gate e, come illustrato in figura, si forma per induzione un canale con portatori di tipo  $n$  fra S e D, per cui una corrente positiva può scorrere da D a S.

Tracciando le curve caratteristiche di drain si ritrova l'andamento visto per i FET. Per i MOSFET vale lo stesso circuito equivalente per piccoli segnali visto per i FET.

Ovviamente accanto al MOSFET a canale  $n$  c'è il MOSFET complementare a canale  $p$ : basta scambiare le zone  $p$  con le zone  $n$  ed invertire la polarità delle tensioni e delle correnti.



## Parte III

# La controreazione negli amplificatori





## Capitolo 8

# La controreazione o feedback

Nessun amplificatore é ideale. Ovvero, nessun amplificatore é perfettamente lineare: la forma d'onda d'uscita non é l'esatta replica scalata della forma d'onda d'ingresso. E anche se l'amplificatore é ragionevolmente lineare per un certo intervallo delle tensioni d'ingresso, il guadagno (o amplificazione) dell'amplificatore varia con le variazioni dell'alimentazione o con la temperatura a causa delle variazioni delle caratteristiche dei transistor con il variare del punto di lavoro e della temperatura. Queste e molte altre limitazioni degli amplificatori reali possono essere minimizzate con l'uso della controreazione negativa (o *feedback* negativo).

### 8.1 Amplificatore a controreazione negativa

Il concetto di controreazione negativa applicato ad un amplificatore può essere illustrato con il diagramma di flusso di figura 8.1(a) oppure con il diagramma a blocchi di figura 8.1(b).

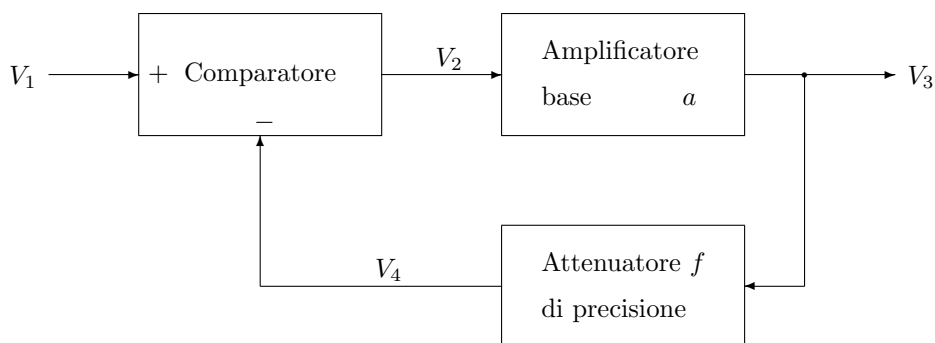


Fig. 8.1(a) - Diagramma di flusso dell'amplificatore a controreazione negativa

Il blocco centrale é costituito dall'amplificatore base di amplificazione  $a$ : esso amplifica il segnale d'ingresso  $V_2$  secondo la legge:

$$V_3 = a V_2.$$

L'uscita dell'amplificatore entra anche nell'attenuatore di precisione  $f$ , composto di componenti passivi di alta precisione e stabilit . Dall'attenuatore esce il segnale  $V_4$  secondo la legge:

$$V_4 = f V_3$$

dove  $f$  é positivo e minore di 1. Infine il comparatore produce il segnale differenza fra l'ingresso  $V_1$  e il segnale di ritorno  $V_4$  secondo la legge:

$$V_2 = V_1 - V_4.$$

Combinando queste relazioni si ottiene la legge che governa l'amplificatore a controreazione:

$$V_3 = a V_2 = a(V_1 - V_4) = a(V_1 - f V_3)$$

da cui

$$V_3(1 + af) = aV_1 \quad V_3 = \frac{a}{1 + af} V_1.$$

**L'amplificazione  $A_f$  dell'amplificatore controreazionato vale:**

$$A_f = \frac{a}{1 + af}$$

Alla stessa relazione si giunge partendo dal diagramma a blocchi di figura 8.1(b), che é una rappresentazione alternativa a quella di figura 8.1(a).

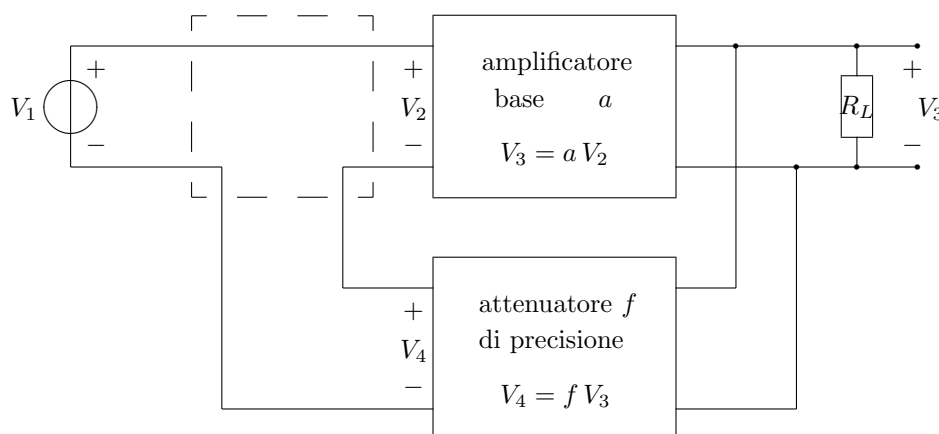


Fig. 8.1(b) - Diagramma a blocchi dell'amplificatore a controreazione negativa

In base alle polarità e alle interconnessioni specificate nelle figure 8.1, **la controreazione é per definizione negativa se  $a$  ed  $f$  hanno lo stesso segno algebrico.**

### 8.1.1 Guadagno

Studiamo l'espressione di  $A_f$ . Se il prodotto  $af$  é molto maggiore dell'unità,  $A_f$  diviene:

$$A_f = \frac{a}{1 + af} \simeq \frac{a}{af} = \frac{1}{f}.$$

Appare che il guadagno dell'amplificatore controreazionato dipende da  $f$  ed é pressoché indipendente dall'amplificazione  $a$  dell'amplificatore base se  $af \gg 1$ . Questo risultato é importantissimo, perché sappiamo che il guadagno di un amplificatore reale dipende dalla temperatura, dalla polarizzazione, ecc. Invece, **il valore di  $f$  può essere controllato con precisione** se per realizzare l'attenuatore passivo

vengono usati componenti passivi R, L, C, disponibili con la precisione voluta.

Possiamo vedere questi fatti in altro modo.  $V_1 = V_2 + fV_3$ ; ma  $fV_3$  vale quasi quanto  $V_1$  per effetto della controreazione negativa quando  $a$  é molto grande;  $V_2$  é quindi molto molto piccolo rispetto ad essi. Pertanto se il guadagno  $a$  dimezza, basta una variazione piccolissima di  $fV_3$  per compensare la variazione di  $V_2$  dovuta alla perdita di guadagno di  $a$ .

Calcoliamo ora la sensibilità del guadagno  $A_f$  dell'amplificatore controreazionato a variazioni del guadagno  $a$  dell'amplificatore base. Scriviamo il differenziale di  $A_f$  nell'ipotesi di piccole variazioni di  $a$ , mentre il valore di  $f$  é rigorosamente costante:

$$dA_f = \left( \frac{1}{1+af} - \frac{af}{(1+af)^2} \right) da = \frac{1}{(1+af)^2} da.$$

Questa relazione può essere scritta in modo da evidenziare la variazione frazionale di  $A_f$ :

$$\frac{dA_f}{A_f} = \frac{1}{1+af} \frac{da}{a}.$$

Cosí, una variazione percentuale di  $a$  é ridotta nel guadagno complessivo  $A_f$  del fattore  $1+af$ , detto *fattore di desensibilizzazione*. Per esempio, se il prodotto  $af$  vale 99, una variazione del 10% in  $a$  induce in  $A_f$  una variazione del solo 0.1%, cioè 100 volte piú piccola.

Chiaramente per avere questi vantaggi occorre pagare un prezzo. Abbiamo visto che l'introduzione della controreazione negativa comporta una riduzione del guadagno. Specificatamente, il rapporto fra il guadagno  $A_f$  dell'amplificatore controreazionato e il guadagno  $a$  dell'amplificatore base é:

$$\frac{A_f}{a} = \frac{1}{1+af}.$$

Il guadagno complessivo é ridotto dello stesso fattore con cui sono attenuate le variazioni interne di guadagno. Fortunatamente, é facile e poco costoso ottenere alti guadagni a bassa potenza con l'uso dei transistor. Perció non abbiamo serie limitazioni all'uso della controreazione.

### 8.1.2 Effetto della controreazione negativa su segnali estranei

La buona funzionalità di un amplificatore é talvolta limitata dalla presenza di segnali estranei, quali il ronzio delle alimentazioni, l'accoppiamento con altri amplificatori vicini, ecc. In certi casi specifici la controreazione negativa può ridurre l'effetto di questi segnali estranei, mentre in altri casi non induce alcun miglioramento. Un esempio importante ci é dato dagli amplificatori d'uscita dei sistemi audio hifi, che sono alimentati con tensione continua, ottenuta per raddrizzamento dall'alternata, ma non stabilizzata. Per meglio capire questo esempio ci rifacciamo alla figura 8.2.

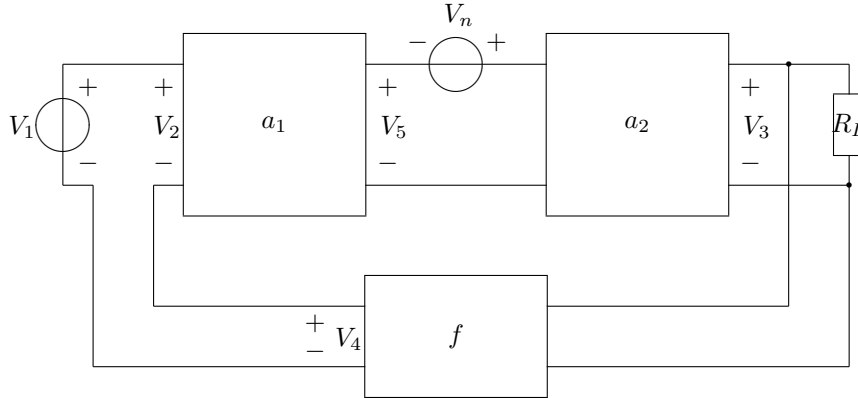


Fig. 8.2

Sia  $a_2$  l'amplificatore di potenza su cui agisce un disturbo dall'alternata, mentre  $a_1$  é l'amplificatore protetto dai disturbi. Rappresentiamo il disturbo su  $a_2$  con il generatore  $V_n$  in serie a  $V_5$  sull'ingresso di  $a_2$ . Calcoliamo la risposta dell'amplificatore controreazionato.

$$V_3 = a_2(V_n + V_5) = a_2(V_n + a_1 V_2) = a_2(V_n + a_1(V_1 - f V_3))$$

da cui

$$V_3(1 + a_1 a_2 f) = a_1 a_2 V_1 + a_2 V_n$$

$$V_3 = \frac{a_1 a_2}{1 + a_1 a_2 f} \left( V_1 + \frac{V_n}{a_1} \right) = A_f \left( V_1 + \frac{V_n}{a_1} \right)$$

Si vede quindi che con un'amplificazione molto elevata di  $a_1$  si può cancellare la presenza del disturbo  $V_n$ . L'amplificatore  $a_2$  avrà un'amplificazione piccola in tensione, ma molto grande in corrente in modo da fornire notevole potenza in uscita, libera dal disturbo.

Osservando il termine  $V_1 + V_n/a_1$  si può notare che basta fare in modo che  $V_n/a_1$  sia trascurabile rispetto a  $V_1$  perché l'effetto del disturbo sia trascurabile.

### 8.1.3 Effetto sulla distorsione

Consideriamo la figura 8.3 che segue. In essa é schematizzato con un blocco un amplificatore di amplificazione  $a$ , alimentato da un alimentatore simmetrico ( $+V_{al}$ ;  $-V_{al}$ ). Ovviamente l'uscita dell'amplificatore non potrà mai andare oltre le tensioni di alimentazione, anzi si fermerá un po' prima per lasciare un minimo di tensione necessaria al funzionamento dei transistor. Inoltre, mentre nella zona centrale della caratteristica di risposta l'amplificazione sarà abbastanza lineare, a mano a mano che ci si avvicina alle alimentazioni la caratteristica si incurva: questo segnala una diminuzione del guadagno. La forma della caratteristica é una chiara dimostrazione che la risposta non é lineare. Il risultato di questa nonlinearity si manifesta come distorsione del segnale in uscita: i segnali più alti in assoluto vengono amplificati meno dei segnali bassi.

Vediamo come la controreazione può essere efficace nel ridurre la nonlinearity dell'amplificatore e quindi la distorsione d'ampiezza che ne consegue.

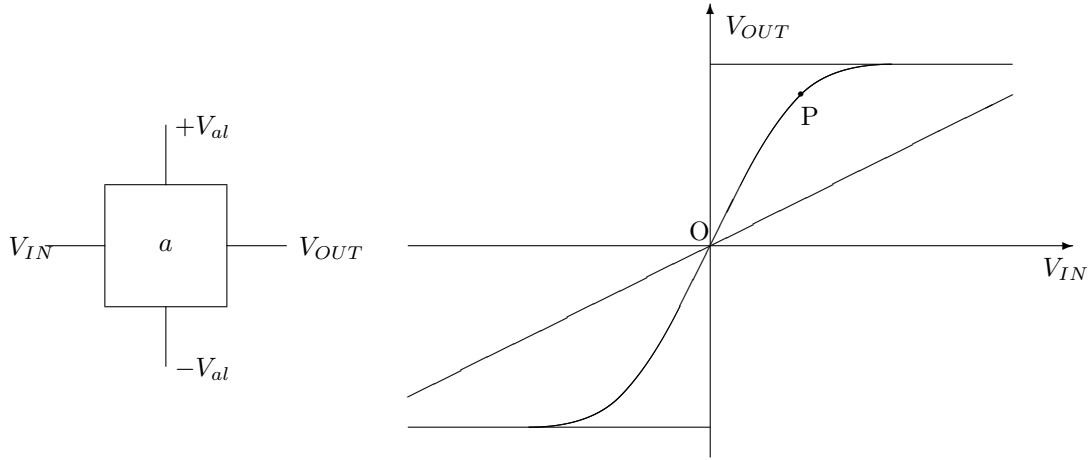


Fig. 8.3

Consideriamo il punto P sulla curva e l'origine O. Sia:  $a_O = 200$ ,  $a_P = 100$ ,  $f = 1/10$ . Calcoliamo i guadagni con controreazione:

$$A_O = \frac{a_O}{1 + a_O f} = \frac{200}{1 + 200/10} = \frac{200}{21} = 9.524$$

$$A_P = \frac{a_P}{1 + a_P f} = \frac{100}{1 + 100/10} = \frac{100}{11} = 9.091$$

Si passa da una variazione del 50% del guadagno  $a$  ad una variazione residua del 4.5% del guadagno  $A_f$ , pur con valori del guadagno  $a$  abbastanza piccoli. Abbiamo certamente ridotto l'effetto della nonlinearity.

Abbiamo visto che con l'uso di coppie di transistor complementari é possibile superare il limite di unidirezionalit  dei transistor. Resta sempre il fatto che al momento del passaggio dallo stato di conduzione allo stato di spegnimento (e viceversa) dei transistor si genera una forte nonlinearity, che d  origine alla distorsione detta di "crossover". Anche il questo caso la controreazione diviene importantissima per ridurre questa distorsione, fino a renderla trascurabile.

## 8.2 Le 4 topologie della controreazione negativa

Abbiamo finora studiato un prototipo di amplificatore a controreazione negativa, che ci ha permesso di valutarne la potenzialit  e di capire molte cose. In generale, in un anello di controreazione sono presenti quattro processi. Oltre all'amplificazione nell'amplificatore base e all'attenuazione nell'attenuatore di precisione, si ha il *campionamento* del segnale in uscita e il *confronto* dei segnali in ingresso, come schematizzato nel diagramma di flusso di figura 8.4.

Il campionamento in uscita pu  essere di tensione oppure di corrente, a seconda che all'attenuatore venga inviato un segnale proporzionale alla tensione o alla corrente.

Il confronto in ingresso pu  essere di tensione oppure di corrente, a seconda che all'amplificatore base sia inviato un segnale derivato dal confronto di tensioni oppure di correnti.

Ne consegue che possono essere effettuate  $2 \times 2 = 4$  scelte distinte che danno origine a 4 configurazioni circuitali distinte. Parliamo allora di 4 topologie circuitali, focalizzando la nostra attenzione sulla natura delle interconnessioni all'ingresso e all'uscita e sulle conseguenze che ne derivano per le relative impedenze.

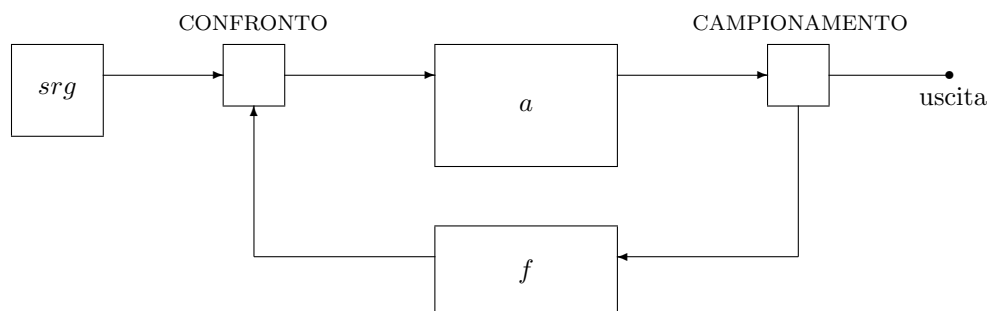


Fig. 8.4

Se torniamo per un momento alla figura 8.1(b), possiamo notare che in ingresso **il confronto di tensione è a maglia** perché lungo una maglia le tensioni si sommano o si sottraggono, mentre in uscita **il campionamento di tensione è a nodo**.

Possiamo aggiungere che il campionamento della corrente in uscita avviene lungo una maglia, per convertire in tensione il valore della corrente campionata ai capi di una resistenza di riferimento: pertanto **il campionamento di corrente è a maglia**. Parimenti il confronto di corrente in ingresso avviene in un nodo, perché è in un nodo che le correnti si sommano o si sottraggono: **il confronto di corrente è a nodo**.

Nello sviluppare l'analisi del comportamento dei circuiti nelle diverse topologie ci avvarremo della rappresentazione dei 2 blocchi amplificatore e attenuatore mediante doppi bipoli, ove ciascuno dei bipoli sarà il circuito equivalente di Thevenin o di Norton a seconda che ci si troverà in una maglia o in un nodo. Analogamente per la sorgente  $srg$ , sceglieremo la sorgente lineare di tensione oppure di corrente a seconda che il confronto avvenga a maglia o a nodo.

Nella figura 8.5 sono disegnati gli schemi a blocchi relativi alle quattro topologie della controreazione negativa.

Iniziamo con l'analizzare visualmente i circuiti d'uscita: vediamo che a coppie hanno struttura identica. Nelle uscite con campionamento a nodo il carico  $R_L$  è pilotato in tensione direttamente dall'amplificatore  $a$  e la stessa tensione va al sistema di controreazione. Nelle uscite con campionamento a maglia la corrente erogata al carico  $R_L$  attraversa anche la rete dell'attenuatore  $f$ , ed è controllata dal sistema della controreazione. Quindi ne deduciamo che il campionamento a nodo controlla la tensione d'uscita; il campionamento a maglia controlla la corrente d'uscita.

Analizziamo visualmente i circuiti d'ingresso: anche qui vediamo che a coppie hanno struttura identica. Nel confronto a maglia le impedenze dei vari blocchi si sommano col risultato che l'impedenza complessiva aumenta e che si richiede meno corrente, quindi meno potenza, al generatore  $e_g$ . Nel confronto a nodo le impedenze dei vari blocchi si trovano in parallelo, col risultato di diminuire l'impedenza complessiva d'ingresso.

E' ora importante condurre uno studio accurato del comportamento delle quattro reti di figura 8.5, incentrate su un amplificatore a contro-azione, per individuarne caratteristiche e peculiarità. In particolare, dobbiamo giungere a costruire il circuito equivalente di Thevenin, o di Norton, sia per l'ingresso che per l'uscita della rete. Cioè dobbiamo poter dedurre che cosa vede la sorgente esterna come ingresso alla rete; dobbiamo dedurre come appare la rete vista dal carico  $R_L$ . Pertanto **il nostro studio deve essere orientato a calcolare le impedenze risultanti d'ingresso e d'uscita, le strutture d'ingresso e d'uscita, la funzione di trasferimento fra ingresso e uscita**. Introduciamo però una semplificazione: consideriamo l'amplificatore base a risposta unilaterale, nel senso che il suo circuito d'ingresso è puramente passivo, mentre l'uscita è ovviamente attiva. Appliciamo il criterio di

unilateralità anche all'attenuatore di precisione, specificando che il suo ingresso agisce sull'uscita, ma non viceversa. In realtà, essendo l'attenuatore una rete passiva, l'unilateralità non è possibile: basta però che la propagazione del segnale in senso inverso sia piccola in modo da poter essere trascurata, e questo è possibile ed è realizzabile.

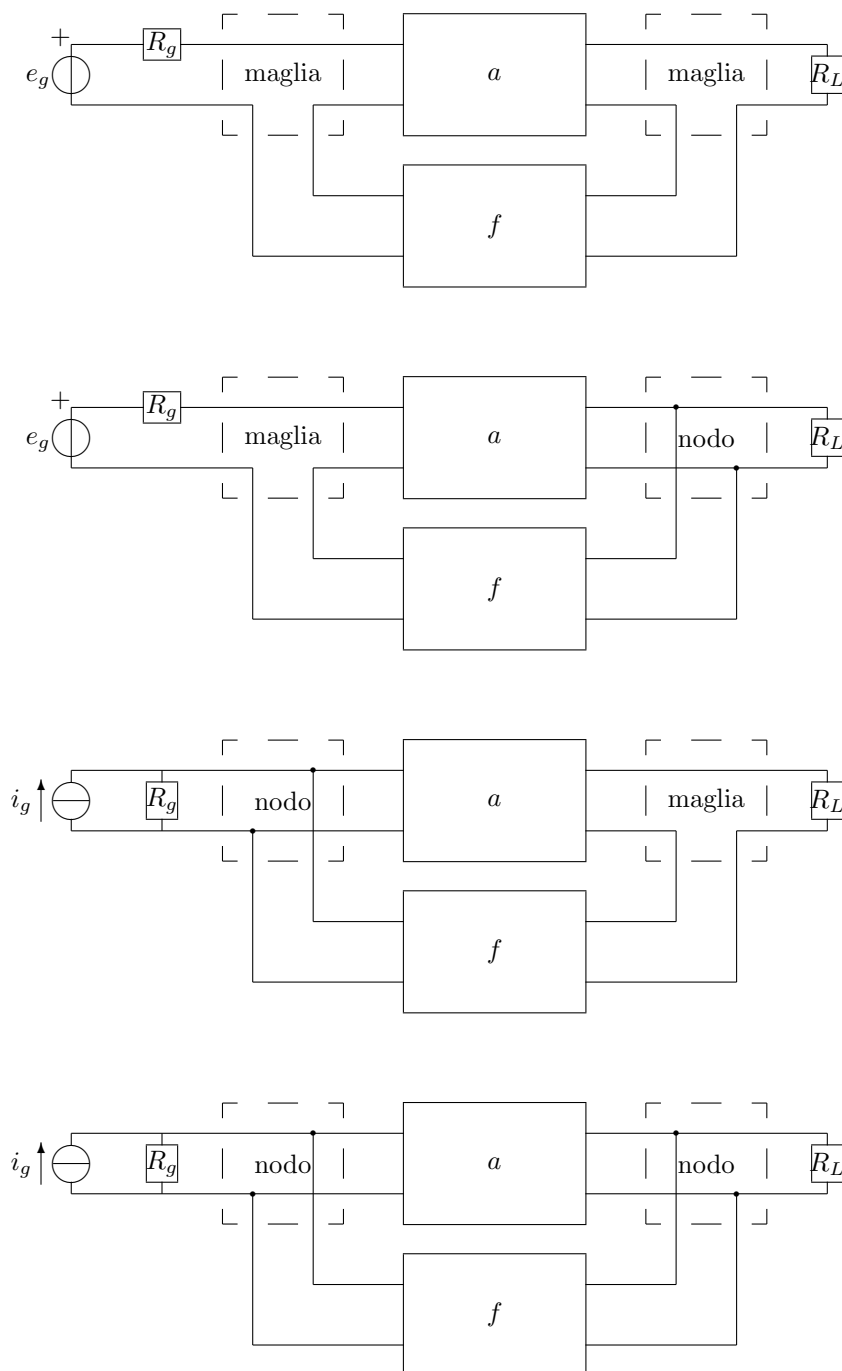


Fig. 8.5

Sviluppiamo il calcolo partendo dalla prima configurazione presentata in figura 8.5, per seguire poi in ordine con le altre configurazioni. Preferiamo sviluppare il calcolo per tutte le configurazioni in forma completa, per una miglior comprensione del fenomeno della controreazione negativa.

### 8.2.1 Confronto a maglia - campionamento a maglia

Disegniamo in figura 8.6 lo schema della prima configurazione di figura 8.5, esplicitando i circuiti equivalenti d'interfaccia dei blocchi  $a$  e  $f$ .

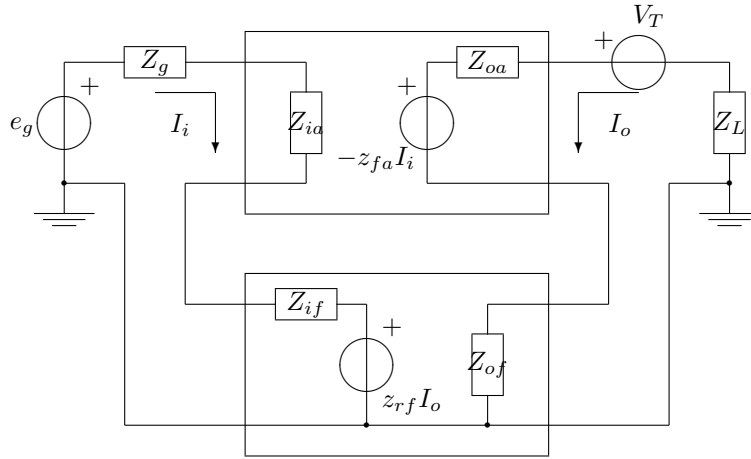


Fig. 8.6

Trattandosi di maglie abbiamo usato i circuiti equivalenti di Thevenin sulle uscite dai blocchi, mentre sugli ingressi abbiamo posto la sola impedenza. Sulla maglia d'uscita é stato inserito il generatore di tensione  $V_T$  per calcolare l'impedenza d'uscita della rete. Sono indicate le correnti di maglia  $I_i$  e  $I_o$  incognite, che dobbiamo determinare. In base al senso di riferimento scelto per la corrente  $I_o$  si é fissato il segno del generatore del ramo di controreazione; poi si é fissato il segno del generatore dell'amplificatore base, che deve essere di tipo invertente per avere il corretto senso della corrente  $I_o$ . Notiamo infine che la continuit  della massa fra circuito d'ingresso e circuito d'uscita é garantita dal ramo di controreazione. Possiamo ora scrivere le due equazioni alle maglie che risolvono il circuito. Per semplificare la scrittura delle equazioni, nella maglia d'ingresso poniamo  $Z_i = Z_g + Z_{ia} + Z_{if}$ ; nella maglia d'uscita poniamo  $Z_o = Z_{of} + Z_{oa} + Z_L$ . Le equazioni divengono:

$$\begin{cases} -e_g + Z_i I_i + z_{rf} I_o &= 0 \\ -z_{fa} I_i + Z_o I_o - V_T &= 0 \end{cases}$$

e riordinando secondo lo schema classico

$$\begin{cases} +Z_i I_i + z_{rf} I_o &= e_g \\ -z_{fa} I_i + Z_o I_o &= V_T \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con la tecnica dei determinanti. Calcoliamo il  $\Delta$  della matrice dei coefficienti:  $\Delta = Z_i Z_o + z_{rf} z_{fa}$ . Notiamo che il  $\Delta$  é sempre positivo. Calcoliamo ora le correnti incognite:

$$I_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} e_g & z_{rf} \\ V_T & Z_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (e_g Z_o - V_T z_{rf})$$



$$I_o = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_i & e_g \\ -z_{fa} & V_T \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (Z_i V_T + z_{fa} e_g)$$

Calcoliamo la corrente d'uscita  $I_o$  in funzione del segnale d'ingresso  $e_g$  con  $V_T = 0$ .

$$\left. \frac{I_o}{e_g} \right|_{V_T=0} = \frac{z_{fa}}{\Delta} = \frac{z_{fa}}{Z_i Z_o + z_{rf} z_{fa}}$$

Dividendo numeratore e denominatore per  $Z_i Z_o$  e riaggiustando l'espressione si ha:

$$\left. \frac{I_o}{e_g} \right|_{V_T=0} = \frac{\frac{z_{fa}}{Z_i Z_o}}{1 + \frac{z_{fa}}{Z_i Z_o} z_{rf}}$$

Sostituendo il rapporto  $\frac{z_{fa}}{Z_i Z_o}$  con  $a$  e  $z_{rf}$  con  $f$ , otteniamo la nota espressione:

$$\left. \frac{I_o}{e_g} \right|_{V_T=0} = \frac{a}{1 + af} = A_f.$$

che evidenzia una struttura a controreazione negativa.

Calcoliamo ora le impedenze d'ingresso e d'uscita della rete di figura 8.6.

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore indipendente  $e_g$ . Ci basterà calcolare il rapporto  $e_g/I_i$  con  $V_T = 0$ .

$$Z_{IN} = \left. \frac{e_g}{I_i} \right|_{V_T=0} = \frac{\Delta}{Z_o} = \frac{Z_i Z_o + z_{rf} z_{fa}}{Z_o} = Z_i \left( 1 + \frac{z_{fa}}{Z_i Z_o} z_{rf} \right)$$

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore  $V_T$  quando  $e_g = 0$ .

$$Z_{OUT} = \left. \frac{V_T}{I_o} \right|_{e_g=0} = \frac{\Delta}{Z_i} = \frac{Z_i Z_o + z_{rf} z_{fa}}{Z_i} = Z_o \left( 1 + \frac{z_{fa}}{Z_i Z_o} z_{rf} \right)$$

Con i risultati del calcolo testé fatto possiamo disegnare in figura 8.7 il circuito equivalente del circuito di figura 8.6.

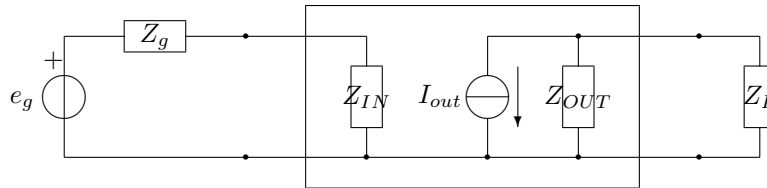


Fig. 8.7

essendo:  $I_{out} = A_f e_g$ .

Se ora facciamo crescere sempre più il guadagno dell'amplificatore base, le impedenze  $Z_{IN}$  e  $Z_{OUT}$  cresceranno a tal punto da poter essere considerate come infinite e il guadagno dell'amplificatore controreazionato diventerà:  $1/z_{rf}$ . L'amplificatore controreazionato risulta invertente, come lo deve essere l'amplificatore base. Dopo queste considerazioni il circuito equivalente finale é il seguente (figura 8.8):

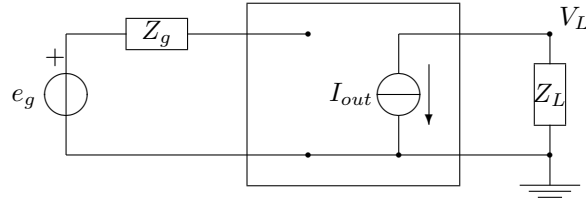


Fig. 8.8

Conclusione: un amplificatore controreazionato con confronto a maglia (o di tensione) e con campionamento a maglia (o di corrente) approssima tanto piú il generatore ideale di corrente comandato di tensione quanto piú é alto il guadagno dell'amplificatore base.

### 8.2.2 Confronto a maglia - campionamento a nodo

Disegniamo in figura 8.9 lo schema della seconda configurazione di figura 8.5, esplicitando i circuiti equivalenti d'interfaccia dei blocchi *a* e *f*.

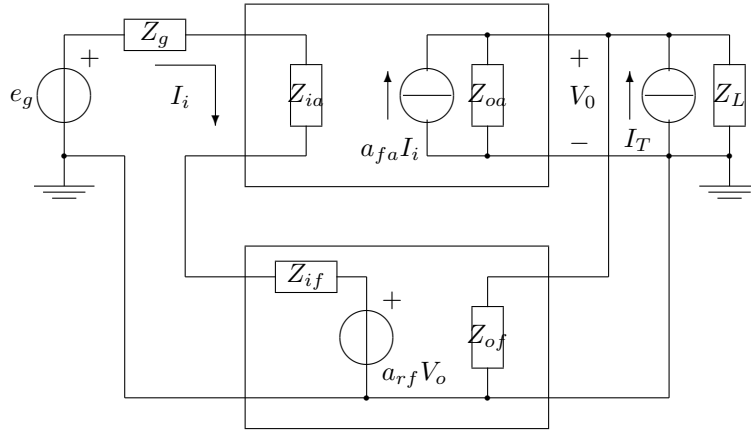


Fig. 8.9

In ingresso il confronto é a maglia e pertanto la rete di controreazione esce con un circuito equivalente di Thevenin. In uscita il campionamento é a nodo e pertanto l'amplificatore base esce con un circuito equivalente di Norton. Sul nodo é stato inserito il generatore di corrente  $I_T$  per calcolare l'impedenza d'uscita della rete. Sono indicate le incognite: la corrente  $I_i$  della maglia; la tensione  $V_o$  del nodo. In base al segno di riferimento scelto per la tensione  $V_o$  si é fissato il segno del generatore di tensione del ramo di controreazione; poi si é fissato il senso del generatore di corrente dell'amplificatore base. Notiamo infine che la continuitá della massa fra circuito d'ingresso e circuito d'uscita é garantita dal ramo di controreazione.

Possiamo ora scrivere le due equazioni che risolvono il circuito. Per semplificare la scrittura delle equazioni, nella maglia d'ingresso poniamo  $Z_i = Z_g + Z_{ia} + Z_{if}$ ; nel nodo d'uscita poniamo  $1/Z_o = 1/Z_{of} + 1/Z_{oa} + 1/Z_L$ . Le equazioni divengono:

$$\begin{cases} -e_g + Z_i I_i + a_{rf} V_o &= 0 \\ -a_{fa} I_i + V_o / Z_o - I_T &= 0 \end{cases}$$

e riordinando secondo lo schema classico

$$\begin{cases} +Z_i I_i + a_{rf} V_o &= e_g \\ -a_{fa} I_i + V_o/Z_o &= I_T \end{cases}$$

Risolviemo il sistema con la tecnica dei determinanti. Calcoliamo il  $\Delta$  della matrice dei coefficienti:  $\Delta = Z_i/Z_o + a_{rf}a_{fa}$ . Notiamo che il  $\Delta$  é sempre positivo. Calcoliamo ora le incognite:

$$I_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} e_g & a_{rf} \\ I_T & 1/Z_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (e_g/Z_o - I_T a_{rf})$$

$$V_o = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_i & e_g \\ -a_{fa} & I_T \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (Z_i I_T + a_{fa} e_g)$$

Calcoliamo la tensione d'uscita  $V_o$  in funzione del segnale d'ingresso  $e_g$  con  $I_T = 0$ .

$$\left. \frac{V_o}{e_g} \right|_{I_T=0} = \frac{a_{fa}}{\Delta} = \frac{a_{fa}}{Z_i/Z_o + a_{rf}a_{fa}}$$

Dividendo numeratore e denominatore per  $Z_i/Z_o$  e riaggiustando l'espressione si ha:

$$\left. \frac{V_o}{e_g} \right|_{I_T=0} = \frac{\frac{a_{fa}}{Z_i/Z_o}}{1 + \frac{a_{fa}}{Z_i/Z_o} a_{rf}}$$

Sostituendo il rapporto  $\frac{a_{fa}}{Z_i/Z_o}$  con  $a$  e  $a_{rf}$  con  $f$ , otteniamo la nota espressione:

$$\left. \frac{V_o}{e_g} \right|_{I_T=0} = \frac{a}{1 + af} = A_f.$$

che evidenzia una struttura a controreazione negativa.

Calcoliamo ora le impedenze d'ingresso e d'uscita della rete di figura 8.9.

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore indipendente  $e_g$ . Ci basterá calcolare il rapporto  $e_g/I_i$  con  $I_T = 0$ .

$$Z_{IN} = \left. \frac{e_g}{I_i} \right|_{I_T=0} = \Delta Z_o = (Z_i/Z_o + a_{rf}a_{fa})Z_o = Z_i \left( 1 + \frac{a_{fa}}{Z_i/Z_o} a_{rf} \right)$$

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore  $I_T$  quando  $e_g = 0$ .

$$Z_{OUT} = \left. \frac{V_o}{I_T} \right|_{e_g=0} = \frac{Z_i}{\Delta} = \frac{Z_i}{Z_i/Z_o + a_{rf}a_{fa}} = \frac{Z_o}{1 + \frac{a_{fa}}{Z_i/Z_o} a_{rf}}$$

Con i risultati del calcolo testé fatto possiamo disegnare in figura 8.10 il circuito equivalente del circuito di figura 8.9.

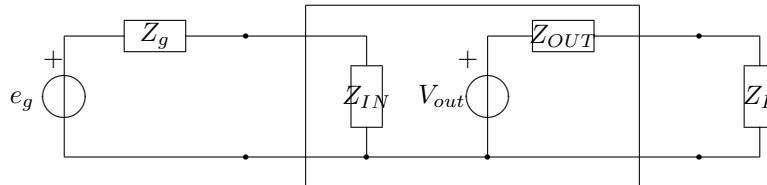


Fig. 8.10

essendo:  $V_{out} = A_f e_g$ .

Se ora facciamo crescere sempre piú il guadagno dell'amplificatore base, l'impedenza  $Z_{IN}$  crescerá a tal punto da poter essere considerata come infinita, l'impedenza  $Z_{OUT}$  invece tenderá a zero e il guadagno dell'amplificatore controreazionato diventerá:  $1/a_{rf}$ . Dopo queste considerazioni il circuito equivalente finale é il seguente (figura 8.11):

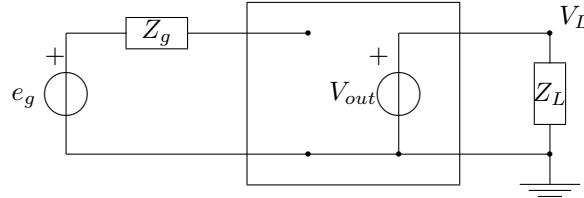


Fig. 8.11

Conclusione: un amplificatore controreazionato con confronto a maglia (o di tensione) e con campionamento a nodo (o di tensione) approssima tanto piú il generatore ideale di tensione comandato di tensione quanto piú é alto il guadagno dell'amplificatore base.

### 8.2.3 Confronto a nodo - campionamento a maglia

Disegniamo in figura 8.12 lo schema della terza configurazione di figura 8.5, esplicitando i circuiti equivalenti d'interfaccia dei blocchi  $a$  e  $f$ .

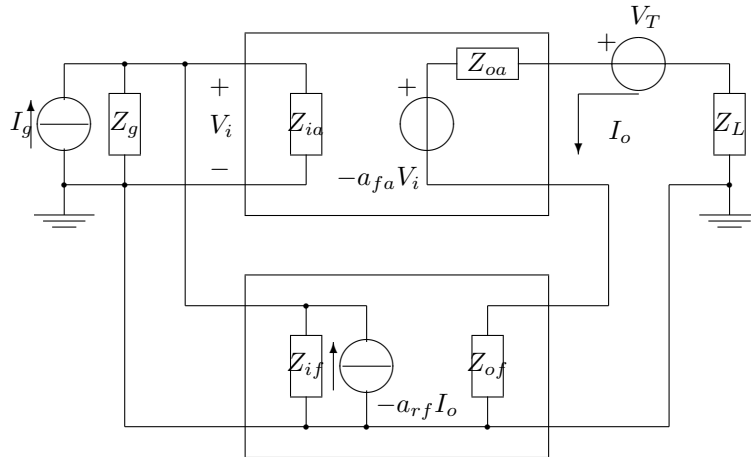


Fig. 8.12

In ingresso il confronto é a nodo e pertanto la rete di controreazione esce con un circuito equivalente di Norton. In uscita il campionamento é a maglia e pertanto l'amplificatore base esce con un circuito equivalente di Thevenin. Lungo la maglia é stato inserito il generatore di tensione  $V_T$  per calcolare l'impedenza d'uscita della rete. Sono indicate le incognite: la corrente  $I_o$  della maglia; la tensione  $V_i$  del nodo. In base al segno di riferimento scelto per la corrente  $I_o$  si é fissato il segno del generatore di corrente del ramo di controreazione; poi si é fissato il senso del generatore di tensione dell'amplificatore base, che deve essere invertente. Notiamo infine che la continuitá della massa fra circuito d'ingresso e circuito d'uscita é garantita dal ramo di controreazione.

Possiamo ora scrivere le due equazioni che risolvono il circuito. Per semplificare la scrittura delle equazioni, nella maglia d'ingresso poniamo  $1/Z_i = 1/Z_g + 1/Z_{ia} + 1/Z_{if}$ ; nel nodo d'uscita poniamo  $Z_o = Z_{of} + Z_{oa} + Z_L$ . Le equazioni divengono:

$$\begin{cases} -I_g + V_i/Z_i + a_{rf}I_o &= 0 \\ -a_{fa}V_i + I_oZ_o - V_T &= 0 \end{cases}$$

e riordinando secondo lo schema classico

$$\begin{cases} +V_i/Z_i + a_{rf}I_o &= I_g \\ -a_{fa}V_i + I_oZ_o &= V_T \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con la tecnica dei determinanti. Calcoliamo il  $\Delta$  della matrice dei coefficienti:  $\Delta = Z_o/Z_i + a_{fa}a_{rf}$ . Notiamo che il  $\Delta$  é sempre positivo. Calcoliamo ora le incognite:

$$V_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_g & a_{rf} \\ V_T & Z_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (I_g Z_o - V_T a_{rf})$$

$$I_o = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1/Z_i & I_g \\ -a_{fa} & V_T \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (V_T/Z_i + a_{fa} I_g)$$

Calcoliamo la corrente d'uscita  $I_o$  in funzione del segnale d'ingresso  $I_g$  con  $V_T = 0$ .

$$\left. \frac{I_o}{I_g} \right|_{V_T=0} = \frac{a_{fa}}{\Delta} = \frac{a_{fa}}{Z_o/Z_i + a_{rf}a_{fa}}$$

Dividendo numeratore e denominatore per  $Z_o/Z_i$  e riaggiustando l'espressione si ha:

$$\left. \frac{I_o}{I_g} \right|_{V_T=0} = \frac{\frac{a_{fa}}{Z_o/Z_i}}{1 + \frac{a_{fa}}{Z_o/Z_i} a_{rf}}$$

Sostituendo il rapporto  $\frac{a_{fa}}{Z_o/Z_i}$  con  $a$  e  $a_{rf}$  con  $f$ , otteniamo la nota espressione:

$$\left. \frac{I_o}{I_g} \right|_{V_T=0} = \frac{a}{1 + af} = A_f.$$

che evidenzia una struttura a controreazione negativa.

Calcoliamo ora le impedenze d'ingresso e d'uscita della rete di figura 8.12.

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore indipendente  $I_g$ . Ci basterá calcolare il rapporto  $V_i/I_g$  con  $V_T = 0$ .

$$Z_{IN} = \left. \frac{V_i}{I_g} \right|_{V_T=0} = \frac{Z_o}{\Delta} = \frac{Z_o}{Z_o/Z_i + a_{fa}a_{rf}} = \frac{Z_i}{1 + \frac{a_{fa}}{Z_o/Z_i} a_{rf}}$$

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore  $V_T$  quando  $I_g = 0$ .

$$Z_{OUT} = \left. \frac{V_T}{I_o} \right|_{I_g=0} = \Delta Z_i = (Z_o/Z_i + a_{rf}a_{fa})Z_i = Z_o \left( 1 + \frac{a_{fa}}{Z_o/Z_i} a_{rf} \right).$$

Possiamo ora disegnare in figura 8.13 il circuito equivalente del circuito di figura 8.12.

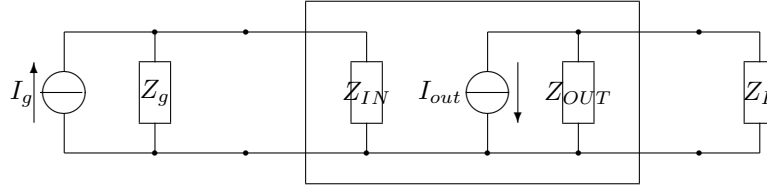


Fig. 8.12

essendo:  $I_{out} = A_f I_g$ .

Se ora facciamo crescere sempre più il guadagno dell'amplificatore base, l'impedenza  $Z_{OUT}$  crescerà a tal punto da poter essere considerata come infinita, l'impedenza  $Z_{IN}$  invece tenderà a zero e il guadagno dell'amplificatore controreazionato diventerà:  $1/a_{rf}$ . Dopo queste considerazioni il circuito equivalente finale è il seguente (figura 8.13):

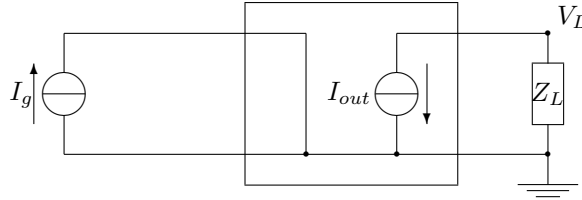


Fig. 8.13

Conclusione: un amplificatore controreazionato con confronto a nodo (o di corrente) e con campionamento a maglia (o di corrente) approssima tanto più il generatore ideale di corrente comandato di corrente quanto più è alto il guadagno dell'amplificatore base.

#### 8.2.4 Confronto a nodo - campionamento a nodo

Disegniamo in figura 8.14 lo schema della terza configurazione di figura 8.5, esplicitando i circuiti equivalenti d'interfaccia dei blocchi  $a$  e  $f$ .

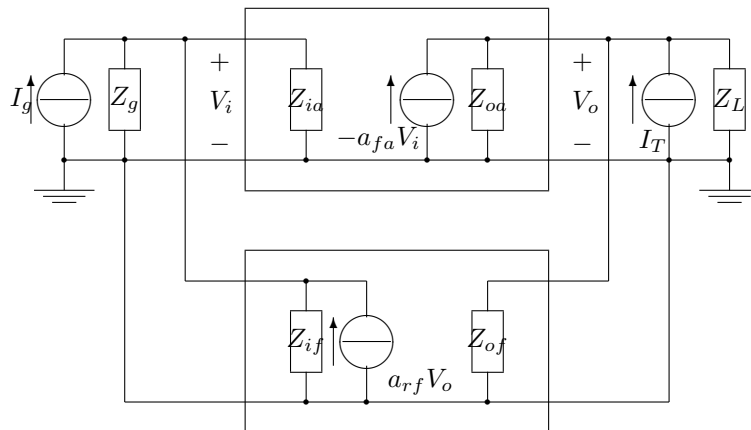


Fig. 8.14

Trattandosi di nodi abbiamo usato i circuiti equivalenti di Norton sulle uscite dai blocchi, mentre sugli ingressi abbiamo posto la sola impedenza. Sulla maglia d'uscita é stato inserito il generatore di corrente  $I_T$  per calcolare l'impedenza d'uscita della rete. Sono indicate le tensioni ai nodi  $V_i$  e  $V_o$  incognite. In base al segno di riferimento scelto per la tensione  $V_o$  si é fissato il senso del generatore del ramo di controreazione; poi si é fissato il senso del generatore dell'amplificatore base, che deve essere di tipo invertente. Notiamo infine che la continuit  della massa fra circuito d'ingresso e circuito d'uscita é garantita sia dal ramo di controreazione, sia dall'amplificatore base.

Possiamo ora scrivere le due equazioni ai nodi che risolvono il circuito. Per semplificare la scrittura delle equazioni, poniamo  $1/Z_i = 1/Z_g + 1/Z_{ia} + 1/Z_{if}$ ;  $1/Z_o = 1/Z_{of} + 1/Z_{oa} + 1/Z_L$ . Le equazioni divengono:

$$\begin{cases} -I_g + V_i/Z_i - a_{rf}V_o &= 0 \\ a_{fa}V_i + V_o/Z_o - I_T &= 0 \end{cases}$$

e riordinando secondo lo schema classico

$$\begin{cases} +V_i/Z_i - a_{rf}I_o &= I_g \\ a_{fa}V_i + V_o/Z_o &= I_T \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con la tecnica dei determinanti. Calcoliamo il  $\Delta$  della matrice dei coefficienti:  $\Delta = 1/Z_o Z_i + a_{fa} a_{rf}$ . Notiamo che il  $\Delta$  é sempre positivo. Calcoliamo ora le incognite:

$$V_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_g & -a_{rf} \\ I_T & 1/Z_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (I_g/Z_o + I_T a_{rf})$$

$$V_o = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1/Z_i & I_g \\ a_{fa} & I_T \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} (I_T/Z_i - a_{fa} I_g)$$

Calcoliamo la tensione d'uscita  $V_o$  in funzione del segnale d'ingresso  $I_g$  con  $I_T = 0$ .

$$\left. \frac{V_o}{I_g} \right|_{I_T=0} = -\frac{a_{fa}}{\Delta} = -\frac{a_{fa}}{1/Z_o Z_i + a_{fa} a_{rf}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $Z_o Z_i$  e riaggiustando l'espressione si ha:

$$\left. \frac{V_o}{I_g} \right|_{I_T=0} = -\frac{a_{fa} Z_o Z_i}{1 + a_{fa} Z_o Z_i a_{rf}}$$

Sostituendo il prodotto  $a_{fa} Z_o Z_i$  con  $a$  e  $a_{rf}$  con  $f$ , otteniamo la nota espressione:

$$\left. \frac{V_o}{I_g} \right|_{I_T=0} = -\frac{a}{1 + af} = -A_f.$$

che evidenzia una struttura a controreazione negativa.

Calcoliamo ora le impedenze d'ingresso e d'uscita della rete di figura 8.12.

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore indipendente  $I_g$ . Ci baster  calcolare il rapporto  $V_i/I_g$  con  $I_T = 0$ .

$$Z_{IN} = \left. \frac{V_i}{I_g} \right|_{I_T=0} = \frac{1}{Z_o \Delta} = \frac{1}{Z_o (1/Z_o Z_i + a_{fa} a_{rf})} = \frac{Z_i}{1 + a_{fa} Z_o Z_i a_{rf}}$$

Calcoliamo l'impedenza vista dal generatore  $I_T$  quando  $I_g = 0$ .

$$Z_{OUT} = \left. \frac{V_T}{I_o} \right|_{I_g=0} = \frac{1}{\Delta Z_i} = \frac{1}{(1/Z_o Z_i + a_{fa} a_{rf}) Z_i} = \frac{Z_o}{1 + a_{fa} Z_o Z_i a_{rf}}.$$

Possiamo ora disegnare in figura 8.15 il circuito equivalente del circuito di figura 8.14.

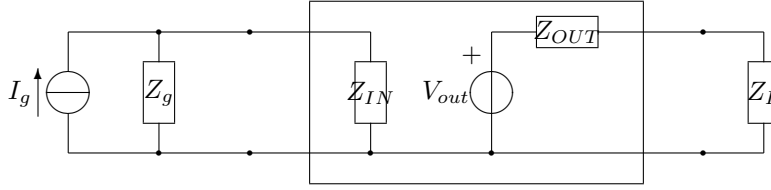


Fig. 8.15

essendo:  $V_{out} = -A_f I_g$ .

Se ora facciamo crescere sempre piú il guadagno dell'amplificatore base, le impedenze  $Z_{IN}$  e  $Z_{OUT}$  tenderanno a zero e il guadagno dell'amplificatore controreazionato diventerá:  $-1/a_{rf}$ . Dopo queste considerazioni il circuito equivalente finale é il seguente (figura 8.16):

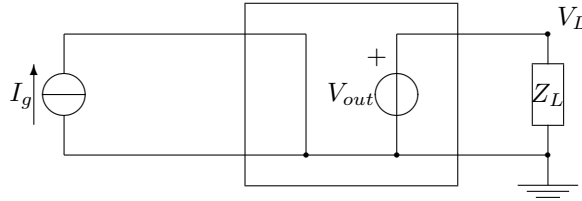


Fig. 8.16

Conclusione: un amplificatore controreazionato con confronto a nodo (o di corrente) e con campionamento a nodo (o di tensione) approssima tanto piú il generatore ideale di tensione comandato di corrente quanto piú é alto il guadagno dell'amplificatore base.

### 8.3 Raffronto fra le quattro configurazioni

Riassumiamo in una tabella i risultati ottenuti con l'analisi dettagliata delle quattro reti corrispondenti alle quattro topologie della controreazione negativa.

confr.	camp.	$Z_{IN}$	$Z_{OUT}$	risposta
maglia	maglia	$Z_i(1 + af)$	$Z_o(1 + af)$	$I_o = \frac{a}{1 + af} e_g$
maglia	nodo	$Z_i(1 + af)$	$\frac{Z_o}{1 + af}$	$V_o = \frac{a}{1 + af} e_g$
nodo	maglia	$\frac{Z_i}{1 + af}$	$Z_o(1 + af)$	$I_o = \frac{a}{1 + af} i_g$
nodo	nodo	$\frac{Z_i}{1 + af}$	$\frac{Z_o}{1 + af}$	$V_o = \frac{-a}{1 + af} i_g$

Notiamo che i comportamenti dei circuiti in ingresso e in uscita sono fra loro completamente disaccoppiati: il comportamento dell'ingresso é definito unicamente dal tipo di confronto adottato; il comportamento dell'uscita é definito unicamente dal tipo di campionamento adottato. Il tipo di risposta del circuito é invece determinato dalla accoppiata confronto-campionamento.



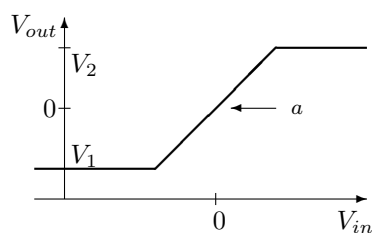
Consideriamo il comportamento in ingresso. **Il confronto a maglia in ingresso ha come effetto quello di aumentare l'impedenza d'ingresso del circuito** rispetto al valore senza controreazione, indipendentemente dal tipo di campionamento in uscita. Analogamente, **il confronto a nodo in ingresso fa diminuire l'impedenza d'ingresso del circuito** rispetto al valore senza controreazione, indipendentemente dal tipo di campionamento in uscita.

Consideriamo ora il comportamento in uscita. **Il campionamento a maglia ha come effetto quello di realizzare in uscita una sorgente lineare di corrente**, facendo aumentare grandemente l'impedenza d'uscita del circuito rispetto al valore senza controreazione e approssimando così un generatore ideale di corrente. Analogamente, **il campionamento a nodo ha come effetto quello di realizzare in uscita una sorgente lineare di tensione**, facendo diminuire grandemente l'impedenza d'uscita del circuito rispetto al valore senza controreazione e approssimando così un generatore ideale di tensione.

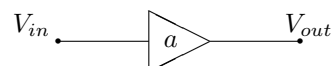
Se l'amplificazione  $a$  è fatta molto grande, ciascuna delle quattro configurazioni va ad approssimare uno dei quattro generatori ideali comandati, che abbiamo studiato nella teoria ideale. **Con l'uso della controreazione negativa possiamo dunque realizzare gli amplificatori reali che approssimano il comportamento degli amplificatori ideali, cioè dei generatori ideali comandati.**

## 8.4 Controreazione negativa e controreazione positiva

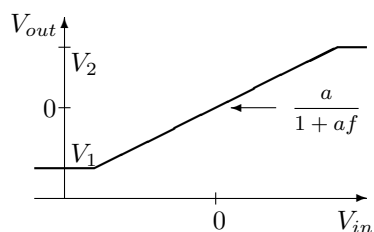
Con l'aiuto di figura 8.17 studiamo l'evoluzione di un amplificatore cui viene applicata una controreazione. Nella colonna di sinistra é disegnata la caratteristica dell'amplificatore risultante, nella colonna di destra il suo diagramma di flusso.



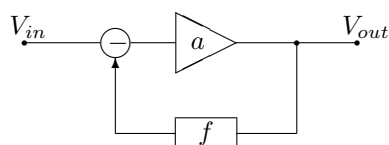
AMPLIFICATORE BASE



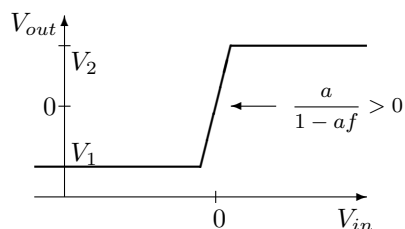
(a)



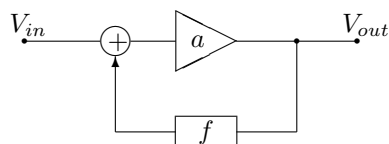
CONTROREAZIONE NEGATIVA



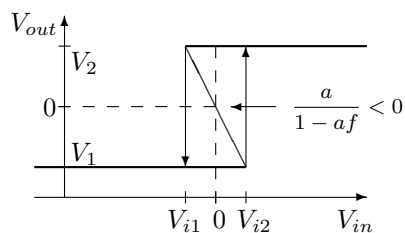
(b)



CONTROREAZIONE POSITIVA



(c)



(d)

Fig. 8.17

**Amplificatore base.** - Nella parte sinistra della figura 8.17a é disegnata la caratteristica idealizzata dell'amplificatore base. La pendenza della regione attiva é  $a$ .  $V_1$  e  $V_2$  sono i limiti di saturazione dell'amplificatore.

**Amplificatore a controreazione negativa.** - Nella parte sinistra di figura 8.17b é disegnata la caratteristica dell'amplificatore con controreazione negativa. La pendenza della regione attiva é:  $A_f = \frac{a}{1+af}$ . Si noti che la pendenza é inferiore a quella dell'amplificatore base e di conseguenza l'intervallo delle tensioni d'ingresso  $V_i$  si é allargato a causa del diminuito guadagno.

**Amplificatore a controreazione positiva.** - Nelle figure 8.17c e 8.17d sono presentati i due casi in cui si articola la controreazione positiva.

Sul diagramma di flusso (lato destro della figura 8.17c) si vede che il segnale di controreazione é sommato al segnale d'ingresso. Scriviamo la legge di funzionamento:

$$V_{out} = a(V_{in} + f V_{out})$$

da cui

$$V_{out}(1 - af) = aV_{in}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{a}{1 - af}$$

Il segno "−" a denominatore indica la controreazione positiva (sic!), essendo  $a > 0$  e  $f > 0$ .

Per il denominatore  $(1 - af)$  si devono considerare tre casi:

$$0 < 1 - af < 1 \qquad 1 - af < 0 \qquad 1 - af = 0.$$

**I caso:**  $0 < 1 - af < 1$  - La situazione é rappresentata nella figura 8.17c. La pendenza  $a/(1 - af)$  é maggiore di  $a$ : il guadagno con controreazione positiva é maggiore del guadagno dell'amplificatore base. In questo caso tutti i difetti (nonlinearità, distorsione, ecc.) dell'amplificatore vengono esaltati. Siamo di fronte al caso di un amplificatore rigenerativo capace di altissimo guadagno, che può essere utile in qualche circostanza se la sua nonlinearità non é un problema.

**II caso:**  $1 - af < 0$  - Questo caso é illustrato in figura 8.17d. Il guadagno risultante é negativo pur se il guadagno dell'amplificatore base é positivo: la caratteristica assume la forma illustrata in figura. Il funzionamento del circuito é il seguente. Poniamo che  $V_{in}$  sia a 0v: l'uscita  $V_{out}$  é a  $V_1$ . Facciamo crescere  $V_{in}$ : l'uscita resta a  $V_1$  fino a che  $V_{in}$  diviene appena maggiore di  $V_{i2}$ . A questo momento l'uscita  $V_{out}$  scatta a  $V_2$  (seguendo la freccia all'insù). Se  $V_{in}$  continua a crescere ancora, l'uscita resta a  $V_2$  lungo la caratteristica orizzontale superiore. Ora dal punto cui siamo arrivati iniziamo a far diminuire  $V_{in}$ . L'uscita resta fissa a  $V_2$  fino a che  $V_{in}$  diviene appena minore di  $V_{i1}$ . A questo punto l'uscita scatta a  $V_1$  (seguendo la freccia all'ingió). Se  $V_{in}$  continua a diminuire, l'uscita resta a  $V_1$  lungo la caratteristica orizzontale inferiore.

Dalla figura si può vedere che, se  $V_{in}$  ha un valore che si situa tra  $V_{i1}$  e  $V_{i2}$ , sono possibili 3 punti sulla caratteristica: due punti stabili a  $V_1$  e  $V_2$  rispettivamente e un punto instabile sulla parte pendente della caratteristica. Il circuito assume un comportamento bistabile: é un circuito ad uscita binaria.

La differenza  $V_{i2} - V_{i1} = V_H$  é detta isteresi del circuito. Essa vale:

$$V_H = \frac{V_2 - V_1}{a} (af - 1)$$

e la sua ampiezza viene controllata scegliendo il valore di  $f$ .

**III caso:**  $1 - af = 0$  - In questo caso il circuito non é piú un amplificatore. Esso diviene un oscillatore e rientra fra i generatori indipendenti di fenomeni oscillatori.

Possiamo rilevare che la controreazione negativa é alla base della elettronica lineare, cioè dell'elaborazione lineare dei segnali elettronici; la controreazione positiva con  $1 - af < 0$  é alla base dei circuiti binari dell'elettronica digitale. Infatti, mentre la controreazione negativa tende a mantenere un amplificatore nella sua regione lineare di funzionamento, quella positiva con  $1 - af < 0$  lo obbliga a saturare.

Consideriamo i due circuiti di Fig. 8.17b e di Fig. 8.17d, rispettivamente. Entrambi per  $V_{in} = 0V$  ammettono  $V_{out} = 0V$  come uscita possibile. Se si tenta di perturbare il circuito con controreazione negativa forzando  $V_{out}$  ad assumere un valore diverso da  $0V$ , l'amplificatore reagisce in modo da neutralizzare la perturbazione e da ripristinare il suo stato  $V_{out} = 0V$ . Non così succede nel circuito con controreazione positiva con  $1 - af < 0$ , perché in questo caso la risposta dell'amplificatore è nella stessa direzione della perturbazione: la tendenza è a rinforzare la perturbazione, anziché a neutralizzarla. Questo effetto rigenerativo porta l'amplificatore in saturazione. Nella pratica le perturbazioni dei circuiti sono costituite dal rumore elettronico intrinseco, sempre presente.

In sintesi, la controreazione positiva con  $1 - af < 0$  ammette due soli stati stabili: tutti gli altri stati intermedi, ancorché possibili, sono altamente instabili. Si può visualizzare la controreazione negativa con la pallina in una cunetta (Fig. 8.18a); quella positiva con la pallina sulla cima di un dosso (Fig. 8.18b). Si può simulare il rumore con una vibrazione meccanica. Nel primo caso la pallina torna nella sua posizione di equilibrio sul fondo della cunetta; nel secondo caso la pallina cade da una delle due parti.

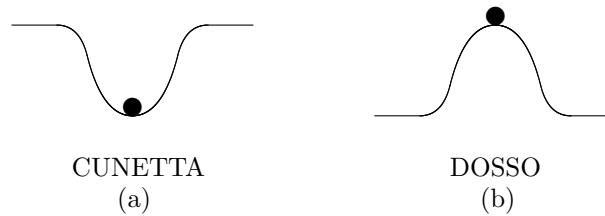


Fig. 8.18

#### 8.4.1 Discriminatori d'ampiezza

L'amplificatore a controreazione positiva di figura 8.17d è noto col nome di discriminatore o comparatore. Consideriamo la figura 8.19.

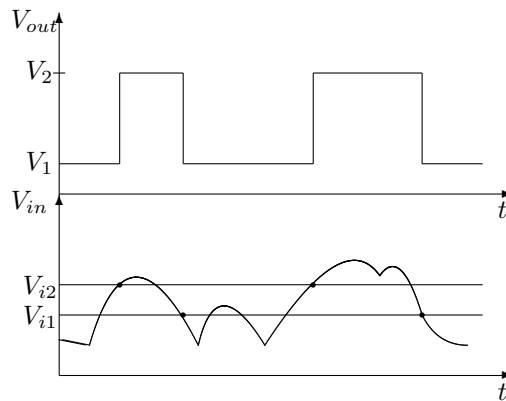


Fig. 8.19

Nella metà inferiore della figura 8.19 è disegnata l'evoluzione temporale del segnale  $V_{in}$ ; nella metà superiore è disegnata l'evoluzione dell'uscita  $V_{out}$ . Si vede che l'uscita cambia da  $V_1$  a  $V_2$  quando il segnale d'ingresso  $V_{in}$  attraversa il livello o soglia  $V_{i2}$  in senso crescente, essendo l'uscita a  $V_1$ . L'uscita cambia da  $V_2$  a  $V_1$

quando il segnale d'ingresso  $V_{in}$  attraversa il livello  $V_{i1}$  in senso decrescente, essendo l'uscita a  $V_2$ .

Se l'intervallo  $V_H = V_{i2} - V_{i1}$  é molto piccolo, vediamo che al campo dei valori della grandezza continua  $V_{in}$  in ingresso corrisponde un campo d'uscita discreto e binario, a seconda che la grandezza  $V_{in}$  stia sopra o sotto la soglia di discriminazione. Otteniamo la conversione di un'informazione, che é continua in un intervallo di valori, in un'informazione binaria (dicotomica). All'atto di questa conversione si é perduta una notevole quantità d'informazione contenuta nel segnale continuo d'ingresso: l'informazione restante é che il segnale sta sopra o sotto la soglia.

L'isteresi  $V_H$  lascia una certa indeterminazione perché c'é una piccola ricopertura dei valori del campo d'ingresso. Occorre però considerare che sul segnale  $V_{in}$  può essere presente una certa banda di variazione dovuta a disturbi o a rumore. Facendo  $V_H$  appena maggiore di questa banda di variazione si viene praticamente ad eliminare, o per lo meno a ridurre di molto, l'effetto dei disturbi sul segnale  $V_{in}$  e l'informazione in uscita risulta più netta e sicura.



## Capitolo 9

# L'amplificatore operazionale

Consideriamo il circuito di figura 9.1, in cui su un amplificatore base viene collegata a ponte una impedenza fra ingresso e uscita, in modo da realizzare una configurazione a controreazione del tipo "confronto a nodo - campionamento a nodo". L'amplificatore base é rappresentato con il circuito equivalente di Norton in uscita e con una semplice impedenza in ingresso. L'amplificatore base é un amplificatore di tensione invertente ed é realizzato in modo che la sua impedenza d'ingresso  $Z_{ia}$  sia elevata.

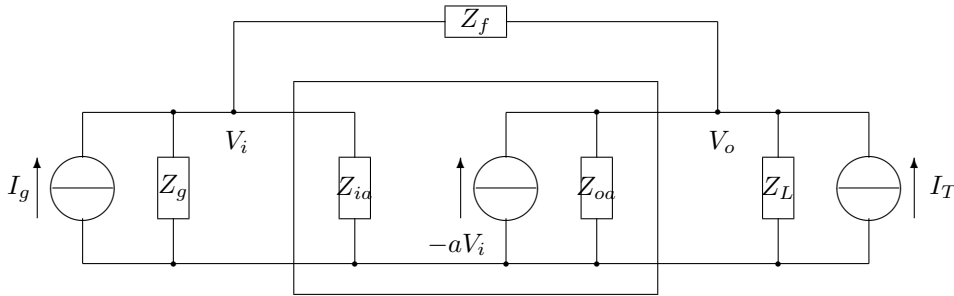


Fig. 9.1

Studiamo questo circuito. Dobbiamo necessariamente trovare che le impedenze d'ingresso e d'uscita dell'amplificatore controreazionato tendono a zero quando il guadagno diventa grandissimo, come già visto nello studio generale. E' poi estremamente interessante l'espressione del guadagno (inteso come funzione di trasferimento ingresso-uscita) risultante in questo caso.

Scriviamo le due equazioni ai nodi  $V_i$  e  $V_o$ .

$$\begin{cases} -I_g + V_i/Z_g + V_i/Z_{ia} + (V_i - V_o)/Z_f &= 0 \\ aV_i + V_o/Z_{oo} + V_o/Z_L + (V_o - V_i)/Z_f &= 0 \end{cases}$$

Poniamo:  $1/Z_o = 1/Z_{oo} + 1/Z_L + 1/Z_f$  e  $1/Z_i = 1/Z_g + 1/Z_{ia} + 1/Z_f$ . Inoltre é  $a > 0$  e la dimensione di  $a$  é l'inverso di un'impedenza. Le due equazioni possono essere cosí riscritte:

$$\begin{cases} 1/Z_i \cdot V_i - 1/Z_f \cdot V_o &= I_g \\ (a - 1/Z_f)V_i + 1/Z_o \cdot V_o &= I_T \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite.

$$\Delta = 1/Z_i Z_o + 1/Z_f(a - 1/Z_f) = 1/Z_i Z_o + 1/Z_f \cdot a - 1/Z_f^2$$

Poiché compare un segno "–" nell'espressione del determinante, dobbiamo sviluppare i conti per verificare che nell'espressione dettagliata di  $\Delta$  il segno "–" non compaia più.

$$\Delta = (1/Z_g + 1/Z_{ia} + 1/Z_f)(1/Z_{oa} + 1/Z_L + 1/Z_f) + 1/Z_f \cdot a - 1/Z_f^2$$

$$\Delta = (1/Z_g + 1/Z_{ia} + 1/Z_f)(1/Z_{oa} + 1/Z_L) + (1/Z_g + 1/Z_{ia})1/Z_f + 1/Z_f^2 + a/Z_f - 1/Z_f^2$$

Si vede chiaramente che il termine negativo si semplifica ed il  $\Delta$  diviene:

$$\Delta = (1/Z_g + 1/Z_{ia} + 1/Z_f)(1/Z_{oa} + 1/Z_L) + (1/Z_g + 1/Z_{ia})1/Z_f + a/Z_f$$

Per comodità di scrittura poniamo:

$$1/Z_{eq}^2 = (1/Z_g + 1/Z_{ia} + 1/Z_f)(1/Z_{oa} + 1/Z_L) + (1/Z_g + 1/Z_{ia})1/Z_f$$

e possiamo scrivere il  $\Delta$  in forma compatta:

$$\Delta = 1/Z_{eq}^2 + a/Z_f$$

Il  $\Delta$  risulta sempre positivo, cioè non si annulla mai (non si presentano casi degeneri). Inoltre è messa in evidenza la dipendenza di  $\Delta$  da  $a$ .

Calcoliamo le tensioni ai nodi.

$$V_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_g & -1/Z_f \\ I_T & 1/Z_o \end{bmatrix} = \frac{I_g/Z_o + I_T/Z_f}{1/Z_{eq}^2 + a/Z_f}$$

$$V_o = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1/Z_i & I_g \\ a - 1/Z_f & I_T \end{bmatrix} = \frac{I_T/Z_i - (a - 1/Z_f)I_g}{1/Z_{eq}^2 + a/Z_f}$$

Calcoliamo la tensione d'uscita  $V_o$  in funzione del segnale d'ingresso  $I_g$  con  $I_T = 0$ .

$$G = \left. \frac{V_o}{I_g} \right|_{I_T=0} = \frac{-a + 1/Z_f}{1/Z_{eq}^2 + a/Z_f}$$

Per  $a$  molto grande ( $a \rightarrow \infty$ ) il rapporto tende a  $-Z_f$ : pertanto in questa condizione possiamo scrivere

$$V_o = -Z_f \cdot I_g.$$

Calcoliamo ora le impedenze d'ingresso e d'uscita.

Calcoliamo l'impedenza d'uscita vista dal generatore  $I_T$  quando  $I_g = 0$ .

$$Z_{OUT} = \left. \frac{V_o}{I_T} \right|_{I_g=0} = \frac{1/Z_i}{1/Z_{eq}^2 + a/Z_f}.$$

Per  $a \rightarrow \infty$ ,  $Z_{OUT} \rightarrow 0$ .

Calcoliamo l'impedenza d'ingresso vista dal generatore indipendente  $I_g$ . Ci basterà calcolare il rapporto  $V_i/I_g$  con  $I_T = 0$ .

$$Z_{IN} = \left. \frac{V_i}{I_g} \right|_{I_T=0} = \frac{1/Z_o}{1/Z_{eq}^2 + a/Z_f}.$$

Per  $a \rightarrow \infty$ ,  $Z_{IN} \rightarrow 0$ .

Per le impedenze d'ingresso e d'uscita abbiamo trovato quanto ci aspettavamo.

Ragionando in termini ideali per  $a \rightarrow \infty$  possiamo concludere che il nostro amplificatore reazionato tende a diventare **un generatore ideale di tensione comandato di corrente, la cui funzione di trasferimento è determinata dalla rete passiva a ponte fra il nodo di confronto in ingresso e il nodo di campionamento in uscita**. Possiamo quindi disegnare il circuito equivalente (figura 9.2).



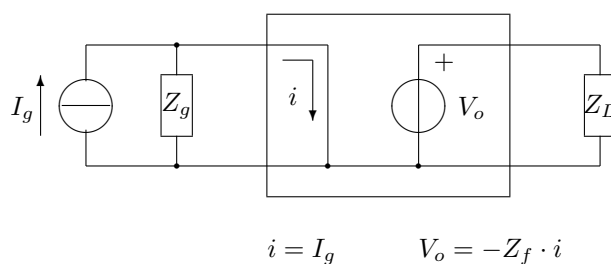


Fig. 9.2

Si noti che la tensione d'uscita  $V_o$  non dipende dal carico  $Z_L$  poiché é erogata da un generatore ideale di tensione.

## 9.1 Schema grafico alternativo dell'amplificatore nodo-nodo

Nella letteratura elettronica l'amplificatore di figura 9.1, che per brevità chiameremo ora *amplificatore nodo-nodo*, viene spesso schematizzato secondo una visione tradizionale, che rispecchia molto bene il modo di funzionare dello stesso. Riproduciamo questo schema nella figura 9.3 che segue e poi lo commentiamo.

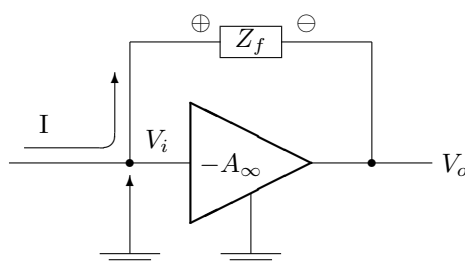


Fig. 9.3

L'amplificatore base é rappresentato con un triangolo, che con la sua orientazione indica la direzione di flusso del segnale. La linea che scende dal triangolo e termina a massa sta a indicare che l'ingresso dell'amplificatore é *referito a massa*. Sull'amplificatore é segnata l'amplificazione  $-A_\infty$ , che sta ad indicare che l'amplificatore é invertente (segno "-") e che l'amplificazione é molto alta (circa infinita). Notiamo nella figura il nodo d'ingresso  $V_i$ , il nodo d'uscita  $V_o$ , l'impedenza  $Z_f$  a ponte fra i due nodi.

L'amplificatore, per come é stato costruito, esce con un generatore di tensione che può essere considerato ideale: l'impedenza d'uscita é considerata nulla.

Vediamo che cosa accade in ingresso, cioè al nodo  $V_i$ . Poniamo che l'uscita  $V_o$  sia ad un potenziale di pochi volt rispetto al riferimento, cioè rispetto a massa. Con un'amplificazione grandissima il potenziale di  $V_i$  deve discostarsi di pochissimo dal riferimento di massa. Per fare un esempio numerico, poniamo che l'uscita  $V_o$  sia a 1volt e che l'amplificazione  $A_\infty$  valga  $10^9$ : allora all'ingresso la tensione sarà a  $V_i = V_o/A_\infty = 1\text{volt}/10^9 = 1\text{nV}$ . 1nanovolt é piccolissimo rispetto a 1volt, non é apprezzabilmente diverso da zero sulla scala del volt. **Per caratterizzare questo comportamento si dice che il nodo  $V_i$  di questo amplificatore é un nodo a massa virtuale.**

Iniettiamo la corrente  $I$  nel nodo  $V_i$ . La corrente praticamente non entra nell'amplificatore perché l'impedenza d'ingresso é elevata (per come é stato costruito) e perché la caduta di potenziale sulla suddetta

impedenza é piccolissima: quindi ne può entrare al più una frazione assolutamente trascurabile. La corrente allora passa tutta nel ramo di feedback attraverso l'impedenza  $Z_f$ , sviluppando una differenza di potenziale  $V_f$  con la polarità indicata in figura 9.3. Quindi per la legge di Ohm:  $V_f = Z_f \cdot I$ . Ma, poiché  $V_i \cong 0$ ,  $V_o$  dovrà porsi ad una tensione negativa pari a  $-V_f$  in modo che la corrente  $I$  possa scorrere attraverso  $Z_f$  e che l'ingresso  $V_i$  resti a 0v. Di conseguenza é:  $V_o = -V_f = -Z_f \cdot I$ . Questo semplice ragionamento ci porta a ritrovare la funzione di trasferimento dell'amplificatore a feedback, che abbiamo precedentemente calcolato. Ma ci fa capire come realmente funziona l'amplificatore a feedback di figura 9.1 (o di figura 9.3). Nel seguito utilizzeremo intensivamente questo schema grafico che abbiamo studiato, considerandolo alla stregua di schema di un elemento ideale.

## 9.2 Applicazioni dell'amplificatore nodo-nodo

### 9.2.1 Moltiplicatore per una costante - Invertitore

Consideriamo il circuito disegnato in figura 9.4.

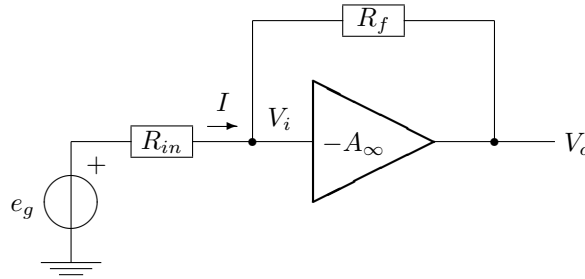


Fig. 9.4

In reazione é posto un resistore  $R_f$ ; in serie al generatore  $e_g$  é posto un resistore  $R_{in}$ . Calcoliamo subito la corrente  $I$  iniettata nel nodo  $V_i$ .

$$I = \frac{e_g}{R_{in}}$$

perché  $V_i$  é una massa virtuale. La corrente  $I$  scorre nel resistore  $R_f$  e genera la tensione d'uscita  $V_o$ :

$$V_o = -R_f I = -\frac{R_f}{R_{in}} e_g.$$

Vediamo che  $e_g$  é stato moltiplicato per una costante, rapporto fra due resistenze, e invertito di segno. Se scegliamo uguali le due resistenze ( $R_{in}$  e  $R_f$ ), allora:

$$V_o = -e_g.$$

In questo caso l'amplificatore risultante é un invertitore.

### 9.2.2 Combinatore lineare

Studiamo il circuito di figura 9.5. Sfruttiamo il fatto che il nodo  $V_i$  é una massa virtuale; ma é altresí un nodo in cui si sommano le correnti.

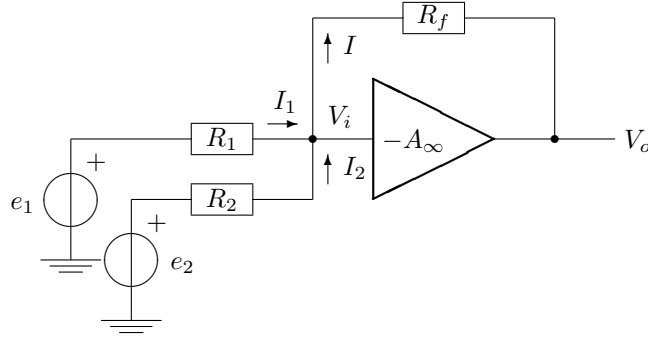


Fig. 9.5

Possiamo subito calcolare le due correnti  $I_1$  e  $I_2$ .

$$I_1 = \frac{e_1}{R_1} \quad I_2 = \frac{e_2}{R_2}$$

Le due correnti si sommano nel nodo  $V_i$  e proseguono come corrente  $I = I_1 + I_2$ . Allora:

$$V_o = -R_f(I_1 + I_2) = -\frac{R_f}{R_1} e_1 - \frac{R_f}{R_2} e_2 = -(k_1 e_1 + k_2 e_2)$$

Quindi, in uscita dall'amplificatore abbiamo una tensione  $V_o$  che é la combinazione lineare delle due tensioni d'ingresso  $e_1$  e  $e_2$ , con segno negativo. Mettendo in serie un invertitore otteniamo la combinazione lineare con segno positivo.

### 9.2.3 Integratore

Consideriamo il circuito di figura 9.6.

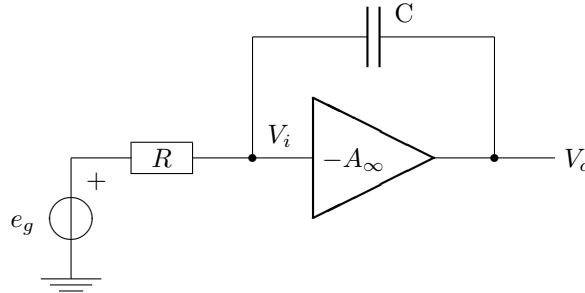


Fig. 9.6

Calcoliamo la risposta nel dominio della variabile complessa  $s$ .

$$V_o(s) = -\frac{1}{sC} I(s) = -\frac{1}{sC} \frac{e_g(s)}{R} = -\frac{1}{RC} \frac{e_g(s)}{s}$$

e antitrasformando

$$V_o(t) - V_o(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t e_g(t) dt$$

Il circuito di figura 9.6 effettua l'integrazione rispetto al tempo nel senso dell'analisi matematica. La costante di tempo  $RC = t_0$  determina l'unità di misura della scala temporale delle ascisse.

### 9.2.4 Derivatore

Consideriamo il circuito di figura 9.7.

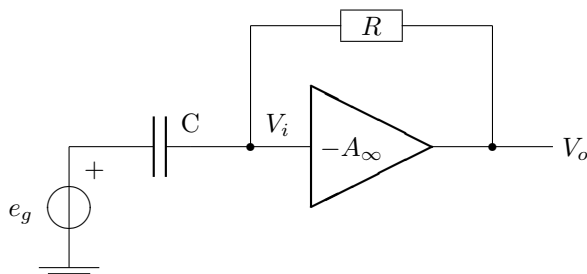


Fig. 9.7

Calcoliamo la risposta nel dominio della variabile complessa  $s$ .

$$V_o = -R I(s) = -R \frac{e_g(s)}{Z_C(s)} = -R \frac{e_g(s)}{1/sC} = -RC \cdot s e_g(s)$$

e antitrasformando

$$V_o(t) = -RC \cdot \frac{de_g(t)}{dt}.$$

Il circuito di figura 9.6 effettua la derivazione rispetto al tempo nel senso dell'analisi matematica. La costante di tempo  $RC = t_0$  determina l'unità di misura della scala temporale delle ascisse.

### 9.2.5 Integrazione di un'equazione differenziale

Supponiamo di voler integrare la seguente equazione differenziale a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + a \cdot \frac{dv(t)}{dt} + b \cdot v(t) = c \cdot e(t).$$

La figura 9.8, che segue, mostra il circuito che risolve l'equazione.

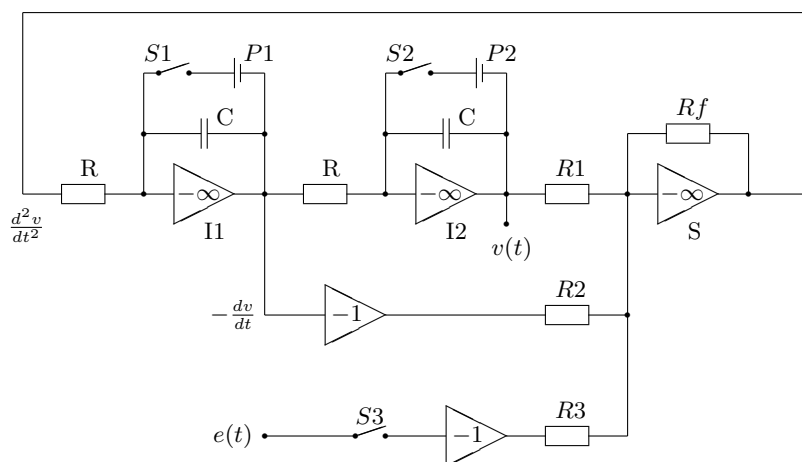


Fig. 9.8

Studiamo la figura. Il primo integratore I1 fa passare dalla  $\frac{d^2v}{dt^2}$  alla  $-\frac{dv}{dt}$ . Il secondo integratore I2 fa passare dalla  $-\frac{dv}{dt}$  alla  $v(t)$ , e questa é l'uscita del nostro circuito. Il sommatore S costruisce la seguente espressione:

$$-\frac{Rf}{R1} v(t) - \frac{Rf}{R2} \frac{dv}{dt} + \frac{Rf}{R3} e(t).$$

che vale  $\frac{d^2v}{dt^2}$ . L'uscita del sommatore S é connessa con l'ingresso dell'integratore I1, che é proprio  $\frac{d^2v}{dt^2}$ . Si scelgono i valori delle resistenze in modo che:

$$\frac{Rf}{R1} = b \quad \frac{Rf}{R2} = a \quad \frac{Rf}{R3} = c.$$

La costante di tempo RC degli integratori fissa il passo temporale per  $v(t)$ .

Vediamo il ruolo dei tre interruttori S1, S2, S3. Inizialmente i due interruttori S1 e S2 sono chiusi e l'interruttore S3 é aperto. In serie agli interruttori S1 e S2 sono poste rispettivamente due pile P1 e P2 che fissano il valore di partenza della carica dei condensatori degli integratori, ponendo cosí le condizioni iniziali. Si aprono contemporaneamente S1 e S2 e si chiude S3. Da questo istante, preso come  $t = 0$ , inizia a funzionare il circuito e dall'uscita  $v(t)$  esce il valore della funzione nel tempo. Per graficare la funzione si usa un plotter del tipo (y,t). Sull'ordinata si manda il segnale  $v(t)$ . Sull'ascissa va il tempo t, cioé il tempo di scorrimento della carta. Se si é scelto il passo temporale  $RC = 1s$ , scegliendo una velocità di scorrimento della carta di 2mm/s il passo temporale dell'andamento della funzione su carta sarà di 2mm. Si ottiene cosí il grafico della funzione, soluzione dell'equazione differenziale di partenza.

### 9.3 L'amplificatore operazionale

Ridisegniamo l'amplificatore nodo-nodo con l'aggiunta di un'impedenza  $Z_{in}$  in ingresso (figura 9.9).

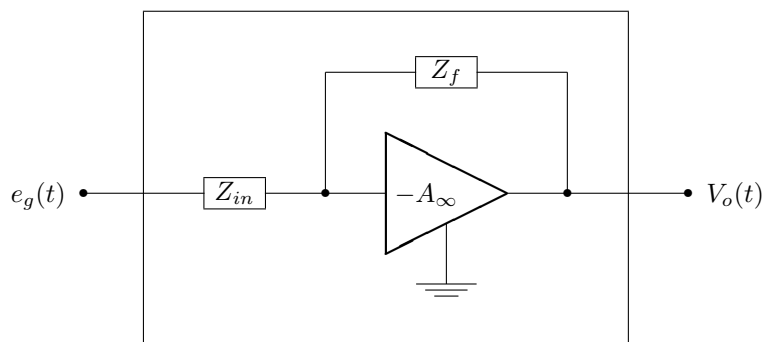


Fig. 9.9

Quello rappresentato in figura 9.9 e racchiuso nel riquadro é l'**amplificatore operazionale**. Esso deve il suo nome al fatto di realizzare elettronicamente le operazioni matematiche precedentemente illustrate, ad esempio la risoluzione di equazioni differenziali. Ma l'amplificatore operazionale si presta ad un ben piú vasto insieme di applicazioni ed é perciò centrale in elettronica.

Riepiloghiamo le caratteristiche principali di questo circuito.

Innanzitutto l'amplificatore base, rappresentato col triangolo, é un amplificatore di tensione comandato di tensione, realizzato in modo da presentare in ingresso una impedenza elevata ed in uscita una impedenza molto piccola rispetto alle impedenze esterne; inoltre ha un'amplificazione molto grande ed invertente.

L'impedenza di feedback, a ponte fra ingresso e uscita, realizza il campionamento a nodo e il confronto a nodo. Di conseguenza il comportamento in uscita approssima un generatore ideale di tensione. In ingresso all'amplificatore-base si ha la configurazione a massa virtuale, che dá grande flessibilità operativa. Ricordiamo che il guadagno dell'amplificatore operazionale, espresso come rapporto fra il segnale di tensione in uscita e il segnale di tensione in ingresso, é:

$$G = \frac{V_o(t)}{e_g(t)} = -\frac{Z_f}{Z_{in}}.$$

Esso dipende esclusivamente dai componenti passivi che costituiscono le impedenze e non dall'amplificazione, se essa é sufficientemente elevata.

## 9.4 Il blocco Op-Amp

Quando la tecnologia ha consentito di produrre i circuiti amplificatori integrati monolitici, il candidato piú adatto é risultato essere l'amplificatore base degli amplificatori operazionali. **E' allora nato lo Op-Amp, cosí denominato proprio per la sua destinazione a nucleo dell'amplificatore operazionale.**

E' stata però introdotta una novità. Nell'amplificatore base dell'operazionale classico il riferimento dell'ingresso é fisso al comune o massa (v. §9.1). Quindi l'ingresso é vincolato a stare a massa virtuale. Questo fatto pone una limitazione alla flessibilità del circuito. Nell'Op-Amp il riferimento é stato svincolato da massa e reso disponibile con un apposito terminale in ingresso. In figura 9.10 é dato il simbolo dell'Op-Amp, con lo schema delle connessioni esterne.

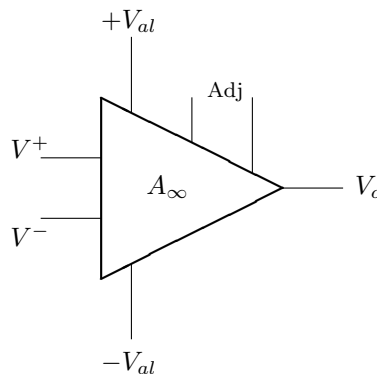


Fig. 9.10

Notiamo i due ingressi  $V^+$  e  $V^-$ , l'uscita  $V_o$ , le due alimentazioni positiva e negativa ( $+V_{al}; -V_{al}$ ) e una coppia di terminali marcati  $Adj$  (vedremo che questi due terminali servono per una regolazione e possono non esserci).

Il terminale  $V^-$  é detto ingresso invertente e corrisponde all'ingresso classico dell'operazionale.

Il terminale  $V^+$  é l'ingresso aggiunto e costituisce il riferimento: é detto ingresso non invertente.

Il guadagno (o amplificazione) dell'Op-Amp é molto elevato ( $> 10^5$ ) ed é indicato con  $A_\infty$ .

La legge che descrive il funzionamento del blocco Op-Amp é la seguente:

$$V_o = A_\infty(V^+ - V^-).$$

Se si pone  $V^+ = 0$  si ritrova la legge che ben conosciamo:

$$V_o = A_\infty (-V^-) = -A_\infty V^-.$$

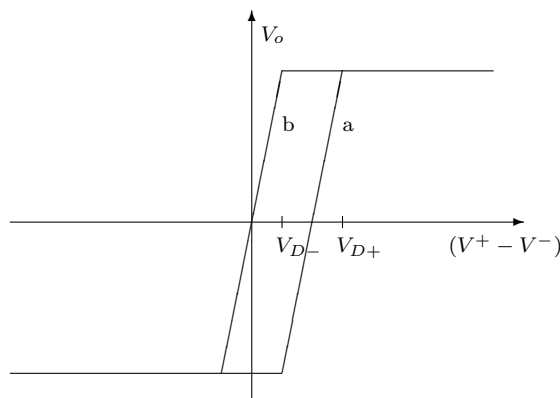


Fig. 9.11

La legge di funzionamento dell'Op-Amp fa riferimento alla caratteristica statica, disegnata in figura 9.11. La caratteristica statica (curva *a*) presenta un tratto pendente quasi-lineare, la regione attiva, in corrispondenza del quale la quantità  $(V^+ - V^-)$  varia fra  $V_{D-}$  e  $V_{D+}$ . Il tratto pendente termina in due zone di saturazione, dovute ai limiti imposti dalle tensioni di alimentazione del circuito.

La curva *a* attraversa l'asse delle ascisse nel punto  $e_0$ , detto offset di tensione dell'Op-Amp e legato alla non perfetta simmetria del circuito d'entrata dell'Op-Amp. In alcuni Op-Amp  $e_0$  può essere annullato attraverso i terminali *Adj*. Se l'Op-Amp fosse ideale la sua curva caratteristica sarebbe la curva *b*.

La pendenza della caratteristica nella zona attiva è molto forte. Considerando che i limiti di saturazione siano a  $\pm 10\text{V}$  e il guadagno  $G$  sia  $10^6$ , una variazione di  $(V^+ - V^-)$  di  $\sim 20\mu\text{V}$  fa passare da un estremo all'altro del tratto pendente. Questo fatto impone di fissare con precisione il punto di lavoro dell'Op-Amp. I due ingressi  $V^+$  e  $V^-$  presentano una **corrente di polarizzazione**, che è la corrente di base dei transistor d'ingresso. Essa è specificata nelle caratteristiche fornite dal costruttore dell'Op-Amp: è in genere molto piccola e in molti casi può essere trascurata. Negli Op-Amp in cui i transistor d'ingresso sono FET, la corrente d'ingresso è considerata nulla.

**Punto di lavoro** - Occorre fissare il punto di lavoro dell'Op-Amp in condizioni statiche per soddisfare due esigenze:

- 1- la prevedibilità, o indipendenza dal particolare campione di Op-Amp utilizzato;
- 2- la stabilità, o costanza del punto di lavoro nel tempo e al variare dei parametri ambientali, soprattutto della temperatura.

Si fissa il punto di lavoro dell'Op-Amp predisponendo un cammino resistivo (anche di resistenza elevata) fra l'uscita  $V_o$  e l'ingresso invertente  $V^-$  (figura 9.12). Si realizza così una controreazione negativa in continua, che lega fra loro i valori di  $V_o$  e  $V^-$ , obbligandoli a restare praticamente alla stessa tensione in assenza di segnale: questa tensione è il livello di zero o punto di lavoro dell'Op-Amp.

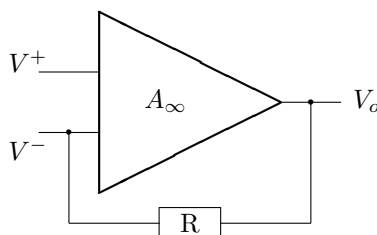


Fig. 9.12

**Disponibilità di corrente dall'uscita dell'Op-Amp** - Abbiamo già visto che l'Op-Amp appare in uscita come un generatore di tensione con bassa impedenza interna o d'uscita. La disponibilità di corrente è però limitata dalla potenza che l'Op-Amp è in grado di dissipare. Per non superare questo limite gli Op-Amp sono dotati di un limitatore interno della corrente, che ne limita l'erogazione a pochi milliamperes. Pertanto occorre consultare le curve caratteristiche fornite dal costruttore per un uso corretto del dispositivo: viene data una curva che indica l'ampiezza massima picco-picco del segnale d'uscita in funzione della resistenza di carico.

**Comportamento dell'Op-Amp in frequenza** - Finora non ci eravamo posti il problema della risposta in frequenza di un Op-Amp. Ricordiamo che un Op-Amp è costruito con un certo numero di transistor in cascata, per avere un alto guadagno complessivo. Ogni transistor presenta una capacità fra collettore e base: pertanto ogni transistor introduce nella funzione di trasferimento complessiva un polo, che ha l'effetto di introdurre uno sfasamento. Lo sfasamento della rete di transistor è quindi la somma degli sfasamenti dovuti ai singoli poli. La controreazione negativa introduce direttamente uno sfasamento di  $\pi$ . Quando il segnale viene riportato in ingresso con la controreazione, allo sfasamento di  $\pi$  si aggiunge lo sfasamento della rete: questo è lo sfasamento complessivo lungo l'anello di controreazione. All'aumentare della frequenza viene introdotto quindi uno sfasamento via via crescente dovuto ai poli. Esiste una frequenza alla quale lo sfasamento complessivo vale  $2\pi$ : il segnale di controreazione ritorna in fase col segnale entrante, col risultato che a quella frequenza la controreazione diviene positiva e fa autooscillare l'amplificatore se il guadagno è maggiore di 1. Quindi l'amplificatore non è stabile.

Per ovviare a questo problema il costruttore pone all'interno dell'Op-Amp un **polo dominante** a frequenza abbastanza bassa, in modo da far sì che il guadagno dell'amplificatore alla frequenza a cui avverrebbe l'oscillazione sia minore di 1. Si raggiunge così la stabilità dell'amplificatore, pagata però con una riduzione del guadagno alle alte frequenze. Si può rappresentare questo fatto ricorrendo al diagramma di Bode. In figura 9.13 è disegnato il diagramma di Bode relativo ad un Op-Amp.

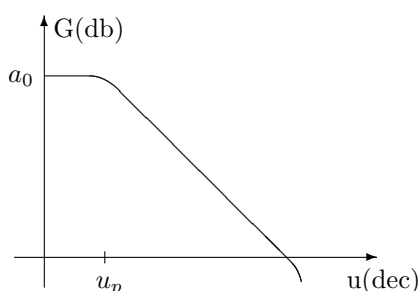


Fig. 9.13

Il guadagno massimo  $a_0$  è disponibile alle basse frequenze fino alla frequenza del polo dominante:  $u_p = \log \nu_p$ . Quindi la banda passante termina a  $\nu_p$ . Oltre, il guadagno scende con la pendenza di 20db/decade.



L'espressione che dá il guadagno nel dominio della variabile  $s$  é la seguente:

$$a(s) = \frac{a_0}{1 + s \kappa}$$

con  $\kappa = \frac{1}{2\pi\nu_p}$  ed é valida per  $a(s) \geq 1$ .

**Stabilit  e banda passante** - Il polo dominante sia posto sull'asse reale negativo (asse di Bode) a  $s = -s_a$ , con  $s_a > 0$  (evidenziamo il segno negativo). L'espressione del guadagno dell'amplificatore é:

$$a(s) = \frac{a_0}{1 + \frac{s}{s_a}}$$

dove  $a_0$  é l'amplificazione prima del polo. Sia  $f(s) = f_0$ , cio  il fattore  $f$  sia indipendente dalla frequenza. Il guadagno in controreazione negativa diviene:

$$\begin{aligned} A_f(s) &= \frac{a(s)}{1 + a(s)f(s)} = \\ &= \frac{\frac{a_0}{1 + s/s_a}}{1 + \frac{a_0}{1 + s/s_a}f_0} = \frac{a_0}{1 + s/s_a + a_0f_0} = \frac{a_0}{1 + a_0f_0} \frac{1}{1 + \frac{s}{s_a(1 + a_0f_0)}} = \frac{A_{f0}}{1 + s/s_1} \end{aligned}$$

dove

$$A_{f0} = \frac{a_0}{1 + a_0f_0}$$

essendo  $A_{f0}$  il guadagno controreazioneato prima del polo dominante.

L'amplificazione con controreazione  $A_f(s)$  presenta ora un polo a  $-s_1$ :

$$-s_1 = -s_a(1 + a_0f_0).$$

Per effetto della controreazione il polo si sposta lungo l'asse reale negativo e si allontana dall'origine di un fattore  $(1 + a_0f_0)$ , passando da  $-s_a$  a  $-s_1$ . L'effetto della controreazione é stato quello di diminuire il guadagno del fattore  $(1 + a_0f_0)$  e di aumentare la banda passante dello stesso fattore  $(1 + a_0f_0)$ . Il prodotto (guadagno)(larghezza di banda) é costante al variare della quantit   $f$  di controreazione impiegata. Appare che sacrificando del guadagno si pu  ottenere una maggior banda passante. Ma questo fatto é solo apparente. Facciamo riferimento alla figura 9.14 che segue.

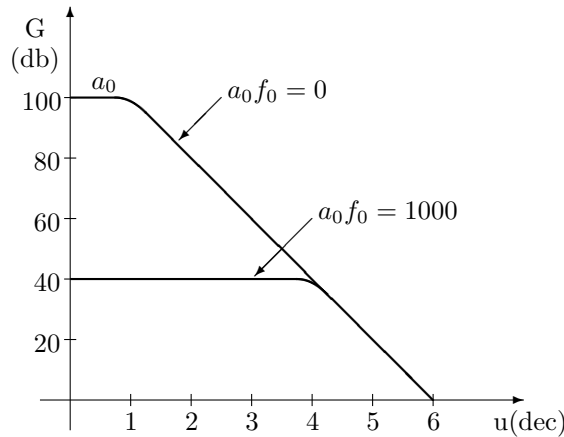


Fig. 9.14

Si vede che riducendo il guadagno di un fattore 1000 la larghezza di banda aumenta di un fattore 1000. Risulta piú largo il tratto piano del guadagno, ma si rimane sempre al di sotto della curva dell'amplificatore base. Inoltre  $a_o$  é massimo prima di  $\omega = s_a$ , poi diminuisce. Il fattore di desensibilizzazione della controreazione a  $f$  costante dipende da  $a$ . Quindi, quando la frequenza aumenta oltre  $\omega = s_a$  il guadagno dell'amplificatore base diminuisce e cosí pure diminuisce il fattore di desensibilizzazione, con le ovvie conseguenze su linearitá, distorsione, ecc. Comunque, l'amplificatore reazionato ha un guadagno ridotto ma stabile su una banda passante piú larga.

## 9.5 Risposta di un Op-Amp

Studiamo la risposta di un Op-Amp nella configurazione piú generale illustrata in figura 9.15.

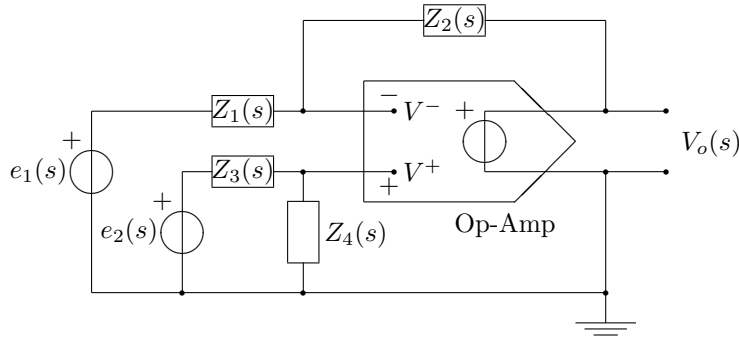


Fig. 9.15

La risposta dell'Op-Amp é data da:

$$V_o(s) = a(s) (V^+(s) - V^-(s)).$$

Scriviamo le espressioni di  $V^+$  e  $V^-$ :

$$V^+(s) = \frac{Z_4(s)}{Z_3(s) + Z_4(s)} e_2(s).$$

Per calcolare  $V^-$  usiamo il teorema della sovrapposizione:

$$V^-(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} e_1(s) + \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V_o(s)$$

Sostituendo nella risposta dell'Op-Amp otteniamo:

$$V_o(s) = a(s) \left[ \frac{Z_4(s)}{Z_3(s) + Z_4(s)} e_2(s) - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} e_1(s) - \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V_o(s) \right]$$

e raccogliendo  $V_o(s)$  a primo membro

$$V_o(s) \left( 1 + \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} a(s) \right) = a(s) \left[ \frac{Z_4(s)}{Z_3(s) + Z_4(s)} e_2(s) - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} e_1(s) \right]$$

da cui l'espressione finale:

$$V_o(s) = \frac{a(s)}{1 + \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} a(s)} \left[ \frac{Z_4(s)}{Z_3(s) + Z_4(s)} e_2(s) - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} e_1(s) \right].$$

Useremo questa relazione per analizzare le applicazioni lineari piú comuni, deducendole come casi particolari dello schema di figura 9.15. Tratteremo prima i casi in cui i bipoli esterni sono puramente resistivi, poi gli altri casi. Vedremo anche che il blocco Op-Amp, anche se nato per costruire amplificatori operazionali come suggerisce il suo nome, é di uso molto piú generale.

### 9.5.1 Bipoli esterni puramente resistivi

Nello schema di figura 9.15 sostituiamo le impedenze con resistenze:  $Z_1(s) = R_1$ ,  $Z_2(s) = R_2$ ,  $Z_3(s) = R_3$ ,  $Z_4(s) = R_4$ . Lo schema diviene (figura 9.16):

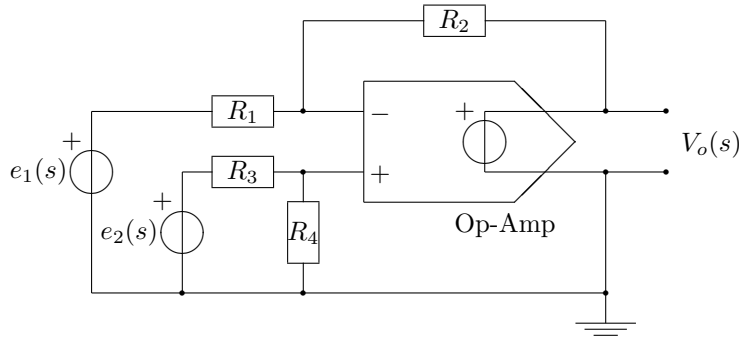


Fig. 9.16

Effettuiamo la sostituzione anche nella espressione che dá la risposta  $V_o$ .

$$V_o(s) = \frac{a(s)}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} a(s)} \left[ \frac{R_4}{R_3 + R_4} e_2(s) - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_1(s) \right].$$

A frequenze inferiori a quella di taglio possiamo sostituire  $a(s)$  con  $a_0$ . Inoltre consideriamo

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} a_0 \gg 1.$$

Scriviamo la formula generale della risposta con bipoli resistivi:

$$V_o(s) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \left[ \frac{R_4}{R_3 + R_4} e_2(s) - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_1(s) \right].$$

**Amplificatore di differenze** - Consideriamo il caso particolare in cui  $R_3 = R_1$  e  $R_4 = R_2$ . L'espressione di  $V_o(s)$  diviene:

$$V_o(s) = \frac{R_2}{R_1} [e_2(s) - e_1(s)]$$

L'uscita  $V_o(s)$  é la differenza amplificata dei segnali d'ingresso:  $e_2(s) - e_1(s)$ . Se poi scegliamo  $R_2 = R_1$  allora si ha la differenza netta. Scambiando di posizione degli ingressi  $e_2(s)$  e  $e_1(s)$  si inverte il senso della differenza.

**Amplificatore non invertente** - Se nella formula generale per bipoli resistivi poniamo  $R_3 = 0$  e  $e_1(s) = 0$  otteniamo:

$$V_o(s) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e_2(s).$$

Otteniamo un amplificatore non invertente con amplificazione determinata dalle sole resistenze presenti sul ramo di controreazione negativa. Il segnale da amplificare entra nell'ingresso non invertente (ecco il perché del suo nome!).

Diamo ora in figura 9.17 lo schema circuitale corrispondente a questo caso:

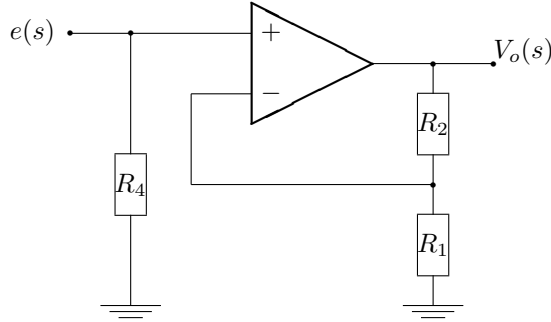


Fig. 9.17

L'espressione del guadagno di questo circuito può essere dedotta direttamente dallo schema, considerando che i due ingressi  $V^+$  e  $V^-$  sono alla stessa tensione:

$$V^- = \frac{R_1}{R_2 + R_1} V_o(s) = V^+ = e(s)$$

da cui l'espressione

$$G = \frac{R_2 + R_1}{R_1}.$$

Il valore della resistenza  $R_4$  è influente perché essa è connessa direttamente al generatore  $e(s)$  e può essere omessa. Siamo in presenza di un amplificatore di tensione comandato di tensione, con elevata impedenza d'ingresso e bassa impedenza d'uscita. Infatti abbiamo un campionamento a nodo e un confronto a maglia. Abbiamo quindi realizzato la terza delle quattro topologie della controreazione studiate precedentemente.

**Buffer non invertente** - Se nel circuito dell'amplificatore non invertente poniamo  $R_2 = 0$ , cioè sostituiamo ad  $R_2$  un cortocircuito ( $R_1$  e  $R_4$  possono essere omesse), risulta:

$$V_o(s) = V^- = V^+ = e(s)$$

abbiamo quindi un amplificatore non invertente con guadagno 1 come illustrato in figura 9.18:

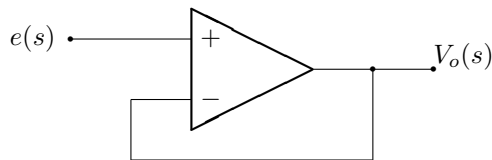


Fig. 9.18

Vediamo che l'ingresso è ad alta impedenza, mentre l'uscita ripete il segnale d'ingresso su bassa impedenza. Il buffer non invertente è adatto per isolare stadi diversi di un circuito complesso. Notiamo qui che il buffer usa tutta la banda disponibile dell'amplificatore base.

**Amplificatore invertente** - Se nella formula generale che dá la risposta con bipoli puramente resistivi poniamo  $e_2(s) = 0$  e  $R_3 = R_4 = 0$ , il che é equivalente a porre  $V^+$  a massa, otteniamo:

$$V_o(s) = -\frac{R_2}{R_1} e(s).$$

Abbiamo cosí l'amplificatore invertente con guadagno costante  $G = -R_2/R_1$ , cioè otteniamo l'amplificatore operazionale elementare. Disegniamone lo schema (figura 9.19):

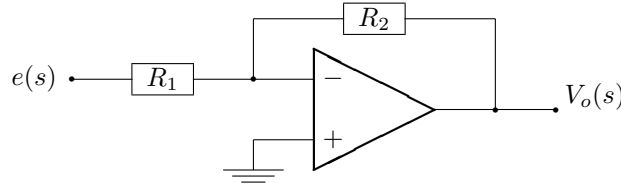


Fig. 9.19

Se poi poniamo  $R_2 = R_1 = R$  abbiamo il **buffer invertente** con guadagno  $G = -1$ . In questo caso l'impedenza d'ingresso vale  $R$ , in quanto  $V^-$  é a massa virtuale.

**Amplificatore tensione-corrente** - Consideriamo il circuito, il cui schema é disegnato in figura 9.20.

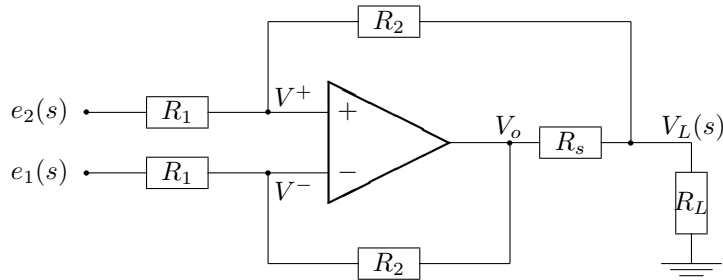


Fig. 9.20

Calcoliamo la risposta di questo circuito usando le equazioni ai nodi ed imponendo poi che  $V^+ = V^-$ .

$$\frac{V^+ - e_2}{R_1} + \frac{V^+ - V_L}{R_2} = 0$$

$$\frac{V^- - e_1}{R_1} + \frac{V^- - V_o}{R_2} = 0$$

da cui, raccogliendo, si ha:

$$V^+ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{e_2}{R_1} + \frac{V_L}{R_2}$$

$$V^- \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{e_1}{R_1} + \frac{V_o}{R_2}$$

Uguagliando fra loro i primi membri perché  $V^+ = V^-$  si ottiene:

$$\frac{e_2}{R_1} + \frac{V_L}{R_2} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{V_o}{R_2}$$

Facciamo ora l'ipotesi aggiuntiva che:  $R_2 \gg R_s$ ,  $R_2 \gg R_L$ . Questo equivale a dire che la corrente che scorre dal nodo  $V_L$  in  $R_2$  é trascurabile rispetto alla corrente che scorre in  $R_s$  e in  $R_L$ . Cosí possiamo scrivere che:

$$V_L = V_o \frac{R_L}{R_L + R_s}.$$

Ricavando  $V_o$  da quest'ultima relazione e sostituendolo nella equazione precedente si ottiene

$$\frac{e_2}{R_1} + \frac{V_L}{R_2} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{V_L}{R_2} \frac{R_L + R_s}{R_L}$$

da cui semplificando

$$\frac{e_2}{R_1} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{V_L}{R_2} \frac{R_s}{R_L}.$$

Possiamo ora ricavare  $V_L$ :

$$V_L = \frac{e_2 - e_1}{R_1} \frac{R_2 R_L}{R_s}$$

e riordinando

$$V_L = \frac{R_2}{R_1} \frac{e_2 - e_1}{R_s} R_L.$$

Il rapporto  $R_2/R_1$  é il guadagno in tensione dello stadio amplificatore centrale. Ponendo  $R_2 = R_1$  la relazione precedente diviene:

$$V_L = \frac{e_2 - e_1}{R_s} R_L = I_o R_L.$$

Si conclude che il circuito di figura 9.20 é un amplificatore di corrente comandato di tensione e che la corrente in uscita é proporzionale alla tensione d'ingresso  $e_2 - e_1$ . Osservando la figura si vede che la corrente d'uscita passa attraverso la resistenza  $R_s$ , che la campiona, e che la tensione che si sviluppa ai capi di  $R_s$  é portata in controreazione in ingresso.

Dai circuiti che abbiamo studiato possiamo trarre un'osservazione importante. Con il blocco Op-Amp abbiamo costruito non solo gli amplificatori operazionali, ma abbiamo realizzato anche le altre configurazioni a controreazione negativa. Quindi l'Op-Amp é di uso molto piú generale di quanto dica il suo nome.

### 9.5.2 Bipoli esterni misti con resistenze e capacità

Giá abbiamo studiato le configurazioni che danno il derivatore e l'integratore. Per ora le lasciamo da parte; le riprenderemo in seguito per trarne alcune conclusioni peculiari. Ora vediamo come si possono costruire delle funzioni di trasferimento.

**Semplice filtro passa-basso** - Studiamo il circuito, il cui schema é disegnato in figura 9.21.

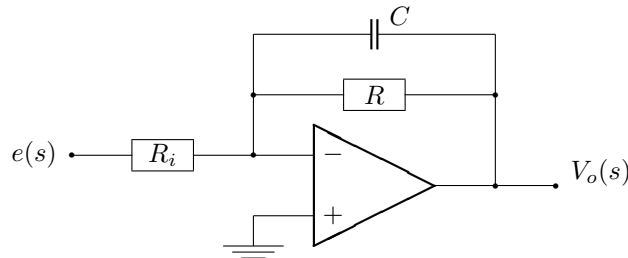


Fig. 9.21

Si può scrivere immediatamente l'espressione della risposta del circuito.

$$\frac{V_o(s)}{e(s)} = G(s) = -\frac{R \parallel 1/sC}{R_i}$$

$$G(s) = -\frac{1}{R_i} \frac{R \cdot 1/sC}{R + 1/sC} = -\frac{R}{R_i} \frac{1}{sRC + 1} = -\frac{1}{CR_i} \cdot \frac{1}{s + 1/RC}$$

Con questo circuito si costruisce un polo a  $s = -1/RC$ .

**Semplice filtro passa-alto** - Studiamo ora il circuito di figura 9.22.

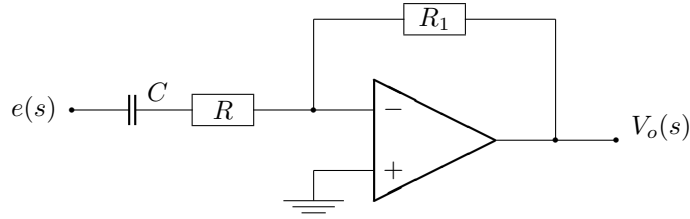


Fig. 9.22

Possiamo scrivere subito l'espressione del guadagno di questo circuito:

$$G(s) = -\frac{R_1}{R + 1/sC} = -\frac{sCR_1}{sCR + 1} = -\frac{R_1}{R} \cdot \frac{s}{s + 1/RC}.$$

Abbiamo costruito una funzione di trasferimento con uno zero a  $\omega = 0$  e un polo a  $\omega = 1/RC$ .

**Semplice filtro passa-banda** - Studiamo il circuito di figura 9.23.

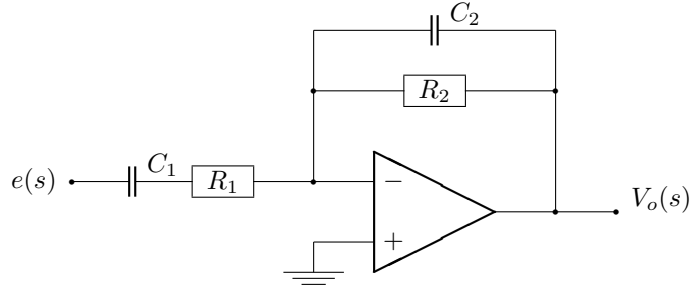


Fig. 9.22

Possiamo scrivere subito l'espressione del guadagno di questo circuito:

$$G(s) = -\frac{R_2 \parallel 1/sC_2}{R_1 + 1/sC_1} = -\frac{sC_1}{sR_1C_1 + 1} \cdot \frac{R_2 \cdot 1/sC_2}{R_2 + 1/sC_2} = -\frac{1}{R_1C_2} \cdot \frac{s}{(s + 1/R_1C_1)(s + 1/R_2C_2)}$$

Abbiamo costruito una funzione di trasferimento con uno zero a  $\omega = 0$ , un polo a  $\omega = 1/R_1C_1$  e un secondo polo a  $\omega = 1/R_2C_2$ .

Le funzioni di trasferimento che abbiamo sintetizzato mediante amplificatori operazionali con varie combinazioni di impedenze sono tutte costruite con poli reali.

Riprendiamo ora in considerazione l'integratore e il derivatore.

**Integratore** - La funzione di trasferimento del circuito integratore (v. 9.2.3) é:

$$T(s) = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s}.$$

Questa funzione presenta un polo per  $s = 0$  e quindi per  $\omega = 0$ . Una tensione continua viene trasmessa invariata, mentre un segnale sinusoidale viene attenuato sempre più ( $-20\text{db/decade}$ ) all'aumentare della frequenza (filtro passa-basso).

**Derivatore** - La funzione di trasferimento del circuito derivatore (v. 9.2.4) é:

$$T(s) = -RC \cdot s.$$

Questa funzione presenta uno zero per  $s = 0$  e quindi per  $\omega = 0$ . Una tensione continua non può propagarsi al di là del condensatore che é situato nel ramo d'ingresso del derivatore. Quindi con uno zero in  $s = 0$  si blocca la continua. Un segnale sinusoidale viene invece trasmesso in modo sempre più efficace ( $+20\text{db/decade}$ ) all'aumentare della frequenza. Se riesaminiamo quanto fatto nella presente sezione, possiamo verificare che nelle funzioni che corrispondono a filtri passa-alto é sempre presente uno zero a  $s = 0$ .

**Sfasatore** - Consideriamo ora il circuito di figura 9.23.

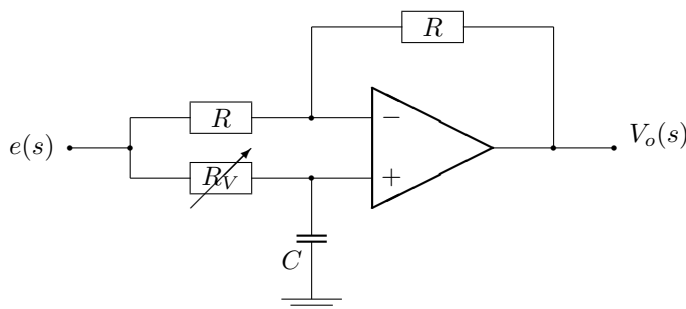


Fig. 9.23

$R_V$  é una resistenza variabile.

Risolviamo il circuito con le equazioni ai nodi  $V^+$  e  $V^-$ .

$$\frac{V^- - e}{R} + \frac{V^- - V_o}{R} = 0$$

$$\frac{V^+ - e}{R_V} + \frac{V^+}{1/sC} = 0$$

Sviluppando i calcoli si ha:

$$2V^- = e + V_o$$

$$V^+(1 + sCR_V) = e$$

da cui imponendo  $V^+ = V^-$  segue:

$$\frac{e + V_o}{e} = \frac{2}{1 + sCR_V}$$



$$V_o = e \left( \frac{2}{1 + sCR_V} - 1 \right)$$

ed infine:

$$\frac{V_o(s)}{e(s)} = F(s) = \frac{1 - sCR_V}{1 + sCR_V}$$

Studiamo la risposta in frequenza di questa rete, ponendo  $s = j\omega$ :

$$F(j\omega) = \frac{1 - j\omega CR_V}{1 + j\omega CR_V}$$

da cui, prendendo modulo e argomento, si ottiene:

$$|F(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\omega CR_V)^2}}{\sqrt{1 + (\omega CR_V)^2}} \equiv 1$$

$$\phi(\omega) = -2 \cdot \arctg(\omega CR_V).$$

Questo circuito realizza uno sfasatore. La sinusoide viene trasmessa senza vararne l'ampiezza, poiché  $|F(j\omega)| = 1$ ; viene invece sfasata di un angolo variabile al variare di  $R_V$ .

### 9.5.3 Reti selettive.

Ora vedremo due circuiti che sintetizzano funzioni di trasferimento con una coppia di poli complessi coniugati.

**Filtro selettivo passa-basso** - Il primo di questi due circuiti é disegnato in figura 9.24.

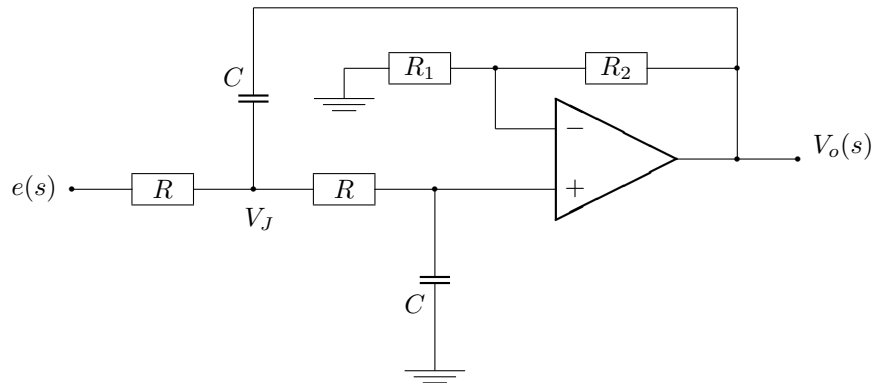


Fig. 9.24

Si notino le due resistenze  $R$  uguali e i due condensatori  $C$  uguali. Risolviamo il circuito usando le equazioni ai nodi. Poniamo:  $\frac{R_2 + R_1}{R_1} = k$  ove può essere solamente  $k \geq 1$ . Scriviamo le equazioni per i tre nodi  $V_J$ ,  $V^+$ ,  $V^-$ .

$$\frac{V_J - e}{R} + \frac{V_J - V_o}{1/sC} + \frac{V_J}{R + 1/sC} = 0$$

$$V^- = \frac{V_o}{k}$$

$$V^+ = V_J \frac{1/sC}{R + 1/sC} = V_J \frac{1}{sRC + 1}$$

Raccogliamo  $V_J$  nella prima equazione; uguagliamo  $V^+$  con  $V^-$ .

$$V_J \left( \frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R + 1/sC} \right) = \frac{e}{R} + sC V_o$$

$$V_J \frac{1}{sRC + 1} = \frac{V_o}{k}$$

Sostituiamo nella prima equazione il  $V_J$  ricavato dalla seconda equazione.

$$V_o \frac{sRC + 1}{k} \left( \frac{1 + sRC}{R} + \frac{sC}{1 + sRC} \right) = \frac{e}{R} + sC V_o$$

$$V_o ((sRC + 1)^2 + sRC) = k e + k sRC V_o$$

$$V_o [(sRC)^2 + 2 sRC + 1 + sRC - k sRC] = k e$$

da cui otteniamo:

$$\frac{V_o(s)}{e(s)} = \frac{k}{(sRC)^2 + (3 - k)(sRC) + 1}$$

Analizziamo questa espressione che abbiamo ricavato, ricordando che deve essere  $k \geq 1$ .

Caso 1 - Se poniamo  $k = 1$  essa diviene:

$$\frac{V_o(s)}{e(s)} = \frac{1}{(sRC)^2 + 2(sRC) + 1} = \frac{1}{(sCR + 1)^2}$$

Otteniamo un polo con molteplicità 2, ovvero due poli coincidenti.

Caso 2 - Se invece  $k$  è compreso fra 1 e 3, ( $1 < k < 3$ ), allora l'espressione ottenuta è quella del filtro selettivo passa-basso, che già abbiamo conosciuto (§ 4.3.3), con  $\omega_c \simeq 1/RC$ .

Caso 3 - Se poniamo  $k = 3$  il secondo membro dell'espressione diviene:

$$\frac{3}{(sCR)^2 + 1}$$

Siamo in presenza di un oscillatore (non di un filtro).

Caso 4 - Per  $k > 3$  si hanno due radici con parte reale positiva. Quindi il circuito è instabile.

**Filtro selettivo passa-alto** Consideriamo ora il circuito di figura 9.25.

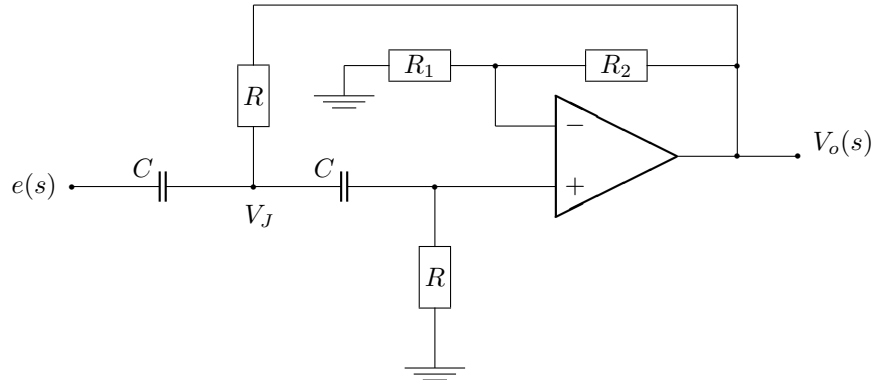


Fig. 9.25

Si notino le due resistenze  $R$  uguali e i due condensatori  $C$  uguali. Risolviamo il circuito usando le equazioni ai nodi. Poniamo:  $\frac{R_2+R_1}{R_1} = k$  ove può essere solamente  $k \geq 1$ . Scriviamo le equazioni per i tre nodi  $V_J$ ,  $V^+$ ,  $V^-$ .

$$\frac{V_J - e}{1(sC)} + \frac{V_J}{R + 1/sC} + \frac{V_J - V_o}{R} = 0$$

$$V^+ = V_J \frac{R}{R + 1/sC}$$

$$V^- = \frac{V_o}{k}$$

Raccogliamo  $V_J$  nella prima equazione; uguagliamo  $V^+$  con  $V^-$ .

$$V_J \left( sC + \frac{1}{R + 1/sC} + \frac{1}{R} \right) = sC e + \frac{V_o}{R}$$

$$V_J \frac{R}{R + 1/sC} = \frac{V_o}{k}$$

Sostituiamo nella prima equazione il  $V_J$  ricavato dalla seconda equazione.

$$\frac{V_o}{k} \frac{sRC + 1}{sRC} \left( \frac{sRC + 1}{R} + \frac{sC}{sRC + 1} \right) = sC e + \frac{V_o}{R}$$

$$\frac{V_o}{k} \frac{sRC + 1}{sRC} \frac{(sRC + 1)^2 + sRC}{R(sRC + 1)} = \frac{sRC e + V_o}{R}$$

$$V_o [(sRC + 1)^2 + sRC] = k(sRC)^2 e + k sRC V_o$$

$$V_o [(sRC)^2 + 3(sRC) + 1 - k(sRC)] = k(sRC)^2 e$$

da cui otteniamo:

$$\frac{V_o(s)}{e(s)} = \frac{k(sRC)^2}{(sRC)^2 + (3 - k)(sRC) + 1}$$

Analizziamo questa espressione che abbiamo ricavato, ricordando che deve essere  $k \geq 1$ .

Caso 1 - Se poniamo  $k = 1$  essa diviene:

$$\frac{V_o(s)}{e(s)} = \frac{(sRC)^2}{(sRC)^2 + 2(sRC) + 1} = \frac{(sRC)^2}{(sRC + 1)^2}$$

Presenza uno zero in  $s = 0$  con molteplicità 2 e un polo a  $s = -1/RC$  con molteplicità 2.

Caso 2 - Se invece  $k$  è compreso fra 1 e 3, ( $1 < k < 3$ ), allora l'espressione ottenuta è quella del filtro selettivo passa-alto con  $\omega_c \simeq 1/RC$ .

Caso 3 - Se poniamo  $k = 3$  l'espressione diviene:

$$\frac{3(sRC)^2}{(sRC)^2 + 1}.$$

Siamo in presenza di un oscillatore (non di un filtro).

Caso 4 - Per  $k > 3$  si hanno due radici con parte reale positiva. Quindi il circuito è instabile.

**Considerazioni aggiuntive** - Le considerazioni che seguono valgono per entrambi i filtri visti or ora. Consideriamo l'amplificatore non invertente con guadagno  $k$ , che appare in entrambi i filtri. Possiamo sostituirlo graficamente con un semplice amplificatore non invertente con guadagno  $k$ . La rete di fig. 9.24 diviene (fig. 9.26):

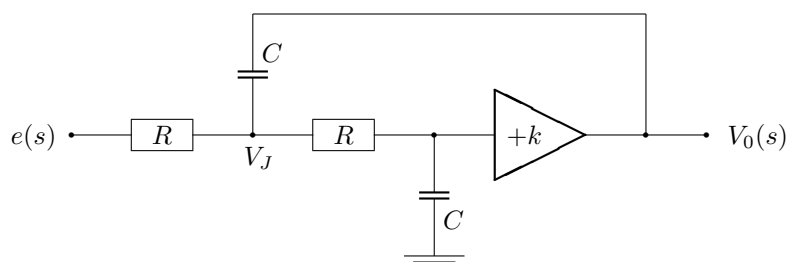


Fig. 9.26

Risulta ben evidente la presenza di una controreazione positiva da  $V_0(s)$  a  $V_J$ . Questa controreazione positiva selettiva in frequenza è responsabile del picco di risonanza a  $\omega_c RC = 1$ .

### 9.5.4 Alcune funzioni speciali

**Convertitore logaritmico** - Supponiamo di voler calcolare in tempo reale la potenza dissipata da un qualche circuito: dobbiamo poter calcolare il prodotto (tensione) $\times$ (corrente). Con i circuiti visti finora ciò non è possibile. Se però disponiamo di un convertitore logaritmico, e del convertitore antilogaritmico complementare, la cosa diviene possibile. Vediamo allora come si può realizzare un convertitore logaritmico.

Consideriamo la figura 9.27.

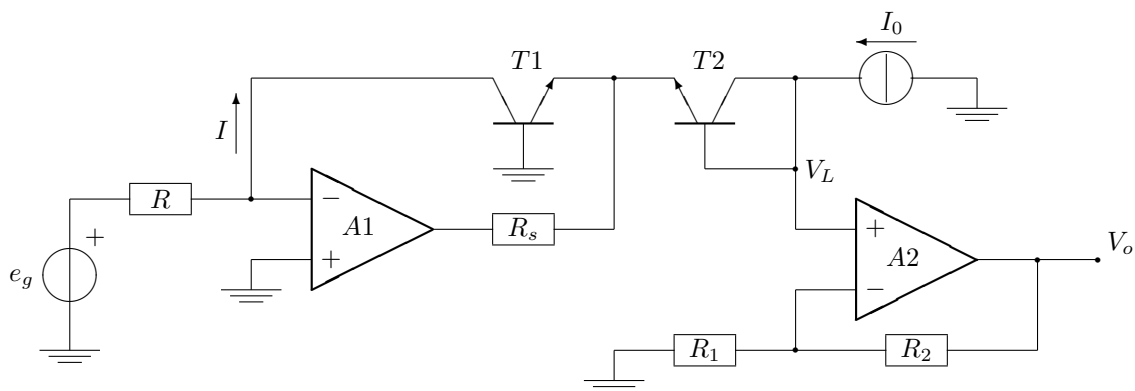


Fig. 9.27

Il circuito opera in modo *non lineare*, ovviamente. Per ottenere una risposta logaritmica facciamo uso della caratteristica (I,V) della giunzione *pn*.

Sia  $e_g$  la tensione di cui vogliamo la corrispondente tensione logaritmica. Dobbiamo convertire il segnale di tensione in un segnale di corrente per usare la caratteristica del diodo. L'anello a reazione attorno all'amplificatore A1 effettua questa operazione. L'ingresso invertente è a massa virtuale. Pertanto  $e_g/R = I$  ed  $I$  è la corrente che ci serve. La corrente  $I$  entra nel collettore del transistor T1 e continua pressoché tutta nel ramo di emettitore. Il collettore è a massa virtuale; la base è a massa. Quindi usiamo la giunzione base-emettitore riferita a massa. La corrente ritorna all'amplificatore attraverso la resistenza

$R_s$ . Simultaneamente nel transistor T2 passa la corrente costante di riferimento  $I_0$ , che termina anch'essa in A1. Possiamo scrivere le equazioni delle due giunzioni dei transistor T1 e T2.

$$I = I_s \left( e^{\frac{qV_{BE1}}{kT}} - 1 \right)$$

$$I_0 = I_s \left( e^{\frac{qV_{BE2}}{kT}} - 1 \right)$$

Riscriviamo le equazioni isolando la parte esponenziale.

$$I + I_s = I_s e^{\frac{qV_{BE1}}{kT}}$$

$$I_0 + I_s = I_s e^{\frac{qV_{BE2}}{kT}}$$

Facendo il rapporto della seconda equazione sulla prima otteniamo:

$$\frac{I_0 + I_s}{I + I_s} = e^{\frac{q}{kT}(V_{BE2} - V_{BE1})}$$

Ma, con riferimento alla figura,  $V_{BE2} - V_{BE1} = V_L$ . Possiamo scrivere:

$$\frac{I_0 + I_s}{I + I_s} = e^{\frac{q}{kT}V_L}$$

Di qui, prendendo il logaritmo naturale, si ha:

$$V_L = \frac{kT}{q} \ln \frac{I_0 + I_s}{I + I_s}$$

Scegliendo transistor in cui  $I_s$  possa essere considerata trascurabile abbiamo:

$$V_L = \frac{kT}{q} \ln \frac{I_0}{I}$$

Si noti che la risposta dipende direttamente dalla temperatura e varia con essa. L'aggiunta dello stadio A2 serve a scegliere in uscita la scala di valori più opportuna per  $V_0$  ed eventualmente a compensare per la variabilità con la temperatura.

**Preamplificatore di carica** - In figura 9.28 è schematizzato il circuito di lettura del segnale da un rivelatore di radiazione nucleare. Il rivelatore a giunzione  $pn$  è schematizzato con il condensatore  $C_D$ , su cui viene raccolta la carica liberata dalla radiazione rivelata. L'azione di rivelazione è rappresentata con un generatore di corrente impulsivo, che rilascia nel rivelatore un "pacchetto" di elettroni, cioè una piccola carica  $-q_0$ .

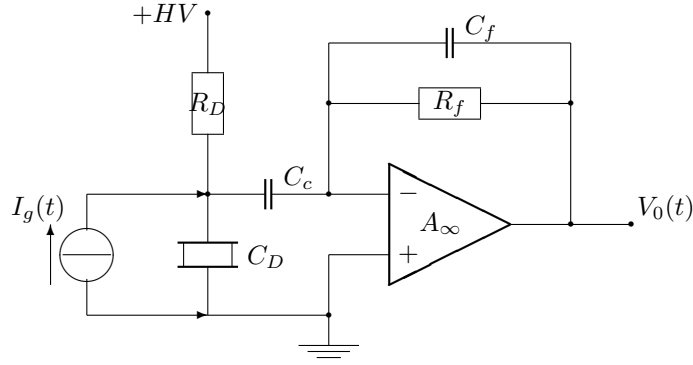


Fig. 9.28

Il funzionamento é il seguente. L'impulso di corrente  $I_g(t) = -q_0 \cdot \delta(t)$  carica il parallelo di  $C_D$  e  $C_c$ , perché il nodo d'ingresso dell'amplificatore é a massa virtuale. Normalmente  $C_D$  vale qualche decina di picofarad, mentre per  $C_c$  si sceglie una capacità di 5nf, almeno. Pertanto tutto l'impulso carica  $C_c$  e quindi entra nell'amplificatore andando a caricare  $C_f$ . Scriviamo la risposta.

$$V_0(s) = I_g(s) \left( -\frac{1}{sC_f} \parallel R_f \right) = q_0 \frac{R_f \cdot 1/sC_f}{R_f + 1/sC_f} = \frac{q_0}{C_f} \frac{1}{s + 1/R_f C_f}$$

Antitrasformando si ha:

$$V_0(t) = \frac{q_0}{C_f} \cdot e^{-t/R_f C_f}.$$

Si vede che la conversione da carica a tensione viene effettuata dal condensatore  $C_f$ , che viene scelto di valore molto piccolo e precisissimo (1pf) nonché ultrastabile. La forma d'onda del segnale in uscita dall'amplificatore é un impulso di tensione a caduta esponenziale, di forma determinata unicamente dalla costante di tempo  $R_f C_f$ . Ovviamente anche per  $R_f$  viene scelto un valore preciso ed ultrastabile. In questo modo il segnale d'uscita dipende esclusivamente dalla carica  $-q_0$ , la variabile che vogliamo misurare.

Il preamplificatore di carica trova applicazione nelle misure di carica eseguite sugli impulsi provenienti da rivelatori di radiazioni nucleari o di radiazioni ottiche o nel prelievo di informazione da trasduttori capacitivi piezoelettrici.

## Capitolo 10

# Il comparatore di tensione

Il comparatore di tensione confronta la tensione di uno dei suoi due ingressi con quella dell'altro e genera in uscita una tensione alta o bassa a seconda di quale dei due ingressi è più alto. Il simbolo usato per il comparatore integrato è lo stesso dello Op-Amp. In Fig. 10.1 sono riportati simbolo e caratteristica del comparatore ideale.

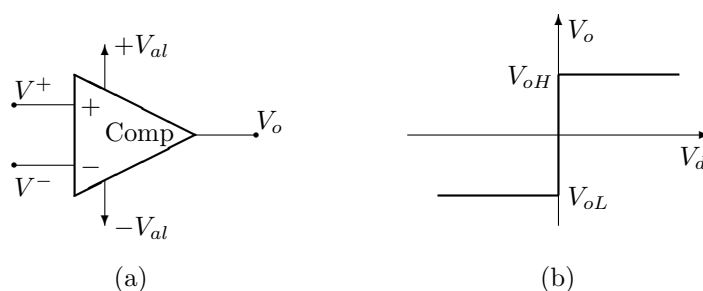


Fig. 10.1

Il funzionamento del comparatore ideale può essere espresso nel modo seguente:

$$V_o = V_{oL} \quad \text{per} \quad V^+ < V^-$$

$$V_o = V_{oH} \quad \text{per} \quad V^+ > V^-$$

dove  $V_{oL}$  e  $V_{oH}$  indicano rispettivamente i livelli di uscita basso e alto. Se introduciamo una tensione  $V_d$ , differenza degli ingressi

$$V_d = V^+ - V^-$$

le equazioni divengono:

$$V_o = V_{oL} \quad \text{per} \quad V_d < 0,$$

$$V_o = V_{oH} \quad \text{per} \quad V_d > 0.$$

Notiamo alcune proprietà rilevanti. Mentre  $V^+, V^-, V_d$  possono variare in un campo *continuo* di valori,  $V_o$  è limitato alla sola coppia di valori estremi  $V_{oL}$  e  $V_{oH}$ . Detto in altro modo, il comparatore riceve all'ingresso *segnali analogici* ma fornisce all'uscita *segnali discreti binari*. Il comparatore è un punto di connessione fra il dominio analogico e il dominio digitale: il comparatore è un convertitore analogico-digitale a una cifra binaria.

La caratteristica di trasferimento del comparatore ideale è *non-lineare*. Appena fuori dall'origine la

caratteristica é costituita da due linee orizzontali poste a  $V_{oL}$  e  $V_{oH}$ , non necessariamente simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. In corrispondenza dell'origine la caratteristica é idealmente un segmento verticale, che indica un'amplificazione infinita.

## 10.1 Il comparatore integrato e il blocco Op-Amp.

Quando la velocità di funzionamento non é critica, il blocco Op-Amp costituisce un buon comparatore di tensione poiché ha un guadagno elevato ( $> 10^5$ ). La caratteristica dell'Op-Amp é stata presentata nel capitolo 9 al punto 9.4: si é detto che una variazione di  $\sim 20\mu V$  fa passare da un estremo all'altro del tratto pendente della caratteristica, approssimando cosí molto bene la caratteristica del comparatore ideale. Nei comparatori integrati si privilegia la velocità di commutazione a scapito del guadagno: in pratica le amplificazioni dei comparatori variano nell'intervallo  $10^3 \div 10^4$ . Conseguentemente  $V_d$  in un comparatore é dell'ordine del millivolt.

Per velocità di commutazione si intende il tempo di transizione per passare da un livello della tensione d'uscita all'altro. Negli Op-Amp questo tempo può essere di alcune decine di microsecondi, troppo lento per molte applicazioni. Nei comparatori il tempo di commutazione viene tenuto sotto il microsecondo e fino a qualche nanosecondo nei comparatori ultraveloci.

## 10.2 La controreazione positiva nei comparatori

Il comparatore può essere usato fissando la tensione di un ingresso (soglia) e facendo variare la tensione dell'altro ingresso. Il comparatore risponde al confronto fra la tensione d'ingresso e la tensione di soglia, dando un'uscita binaria secondo quanto già visto.

Oppure il comparatore può essere controllato con una controreazione positiva. Facciamo riferimento alla Fig. 10.2.

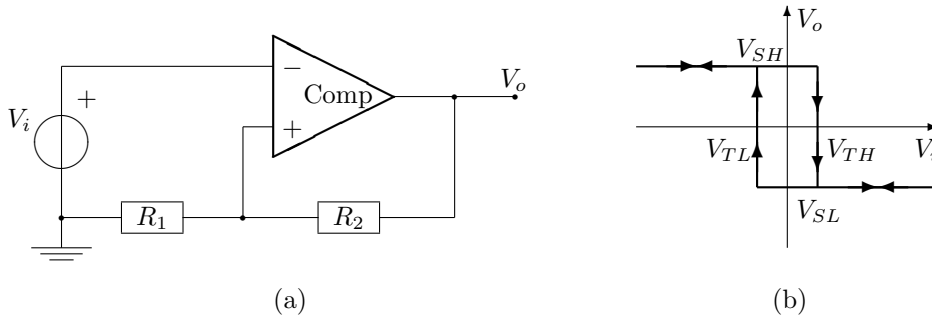


Fig. 10.2

Il circuito può essere visto come un rivelatore invertente a soglia, con la tensione di soglia controllata dall'uscita. A causa della controreazione positiva la tensione d'uscita ammette due soli stati possibili  $V_o = V_{SH}$  e  $V_o = V_{SL}$ , dove  $V_{SH}$  e  $V_{SL}$  sono i due livelli di saturazione dell'uscita del comparatore. Corrispondentemente, si hanno due tensioni di soglia:

$$V_{TH} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_{SH} \quad \quad V_{TL} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_{SL}.$$

Con riferimento al disegno di Fig. 10.2b, quando il segnale proviene da sinistra la soglia operativa é  $V_{TH}$ , quando il segnale proviene da destra la soglia operativa diviene  $V_{TL}$ : durante gli intervalli in cui  $V_i$  aumenta l'uscita scatta quando  $V_i$  incrocia  $V_{TH}$ ; durante gli intervalli in cui  $V_i$  diminuisce l'uscita scatta



quando  $V_i$  incrocia  $V_{TL}$ . Mentre i tratti orizzontali della curva di trasferimento possono essere percorsi in entrambi i sensi sotto controllo esterno, i tratti verticali possono essere percorsi solo in senso orario sotto stretto controllo dell'effetto rigenerativo della controreazione positiva.

### 10.3 Isteresi

Quando una caratteristica di trasferimento ha due distinti punti d'inversione, cioè due cammini distinti di commutazione, si dice che essa presenta isteresi. L'ampiezza dell'isteresi é definita come:

$$V_H = V_{TH} - V_{TL}$$

e per il circuito di Fig. 10.2 diviene

$$V_H = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (V_{SH} - V_{SL}).$$

L'ampiezza  $V_H$  dell'isteresi può essere variata cambiando il rapporto delle resistenze  $R_1/R_2$ . Se questo rapporto diminuisce  $V_{TH}$  e  $V_{TL}$  si avvicinano. Al limite per  $R_1 = 0$  i due segmenti si sovrappongono, dato che risulta  $V_H = 0$ . In tal caso il circuito diventa un rivelatore invertente del passaggio per lo zero del segnale  $V_i$ , a meno dell'eventuale offset dell'ingresso del componente stesso. La controreazione positiva ha anche l'effetto di rendere più netta e precisa la tensione di commutazione.



# Parte IV

## Appendice



## Appendice A

# Dalla teoria alla pratica di laboratorio

Normalmente in laboratorio viene dato lo schema elettrico di un circuito da realizzare. Nello schema compaiono i componenti attivi (transistori, amplificatori integrati, altri circuiti integrati, tutti indicati con la sigla di identificazione) contornati dai componenti passivi (resistori, condensatori, diodi, ecc.) necessari per far funzionare gli elementi attivi e realizzare la funzionalità voluta. Quando non è specificato il valore delle resistenze e delle capacità che compaiono nel circuito si dice che il circuito non è dimensionato. Occorre perciò procedere al dimensionamento del circuito: dobbiamo stabilire il punto di lavoro (o polarizzazione) dei componenti attivi, quindi dobbiamo decidere i valori delle tensioni nei nodi ed i valori delle correnti che devono scorrere nei vari rami e da essi dedurre il valore dei componenti passivi. Nel seguito vedremo come si fa.

### A.1 I componenti reali

Premettiamo alcune considerazioni sui componenti reali disponibili.

Partiamo dai **resistori**. Appaiono sotto forma di un cilindretto, approssimativamente, con due reofori o terminali. La dimensione del cilindretto è in relazione alla potenza che può dissipare. Ovviamente la potenza massima ammessa non deve essere ecceduta altrimenti il resistore si carbonizza. Sappiamo che due resistori in serie sono equivalenti ad un resistore con resistenza pari alla somma delle due resistenze: quindi la resistenza totale aumenta. Sappiamo che due resistori in parallelo sono equivalenti ad un resistore la cui resistenza è pari all'inverso della somma degli inversi delle due resistenze: quindi la resistenza totale diminuisce rispetto ad entrambe le resistenze iniziali.

Con due resistori si può realizzare un **partitore resistivo**. Esso viene normalmente utilizzato per ricavare una tensione intermedia fra le due estreme, sempre tenendo presente il teorema di Thevenin. Nella figura A.1 che segue è dato lo schema elettrico del partitore e la relativa legge quantitativa.

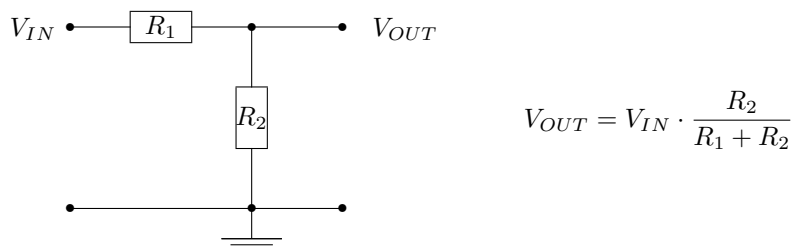


Fig. A.1

Esistono poi dei resistori a resistenza variabile. Un primo esempio é il **reostato**, illustrato nella figura A.2 che segue.

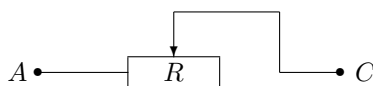


Fig. A.2

Fra i morsetti *A* e *C* il valore della resistenza può variare da 0 ad *R* con continuità agendo sulla regolazione esterna: la freccetta sta ad indicare che il punto di contatto (il cursore) può scorrere lungo tutto il resistore. Un secondo esempio é il **potenziometro** (fig. A.3). E' un dispositivo a tre terminali: due terminali fissi agli estremi del resistore (*A* e *B*) e un terminale mobile (cursore) *C*, con un contatto scorrevole lungo il resistore. Può essere considerato un partitore a rapporto variabile. La tensione d'uscita  $V_C$  può assumere con continuità qualsiasi valore fra  $V_A$  e  $V_B$ . Occorre tenere sempre presente il teorema di Thevenin per calcolare la resistenza equivalente.

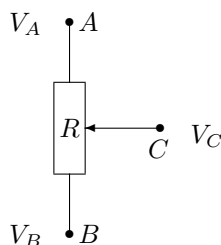


Fig. A.3

Con il potenziometro si può realizzare un reostato utilizzando uno dei contatti estremi e il cursore.

Consideriamo ora i **condensatori**. I condensatori possono essere suddivisi in due classi: i condensatori a dielettrico non polarizzato; i condensatori elettrolitici. Alla prima classe appartengono i condensatori con dielettrico in aria, a mica, a film di poliestere o di policarbonato. Sopportano ai capi entrambe le polarità, ma non si deve mai superare la tensione di rottura, indicata sul componente, oltre la quale si fulminano. Poiché la capacità di questi condensatori dipende esclusivamente dalle loro dimensioni geometriche, essi non consentono di raggiungere capacità elevate. Per questo motivo sono stati introdotti i condensatori elettrolitici, in cui la capacità elettrica dipende dalla quantità di carica che può essere immagazzinata nella soluzione elettrolitica presente fra le armature del condensatore. In questo caso la capacità é molto elevata. Ma l'elettrolito é polarizzato, nel senso che la differenza di tensione deve essere concorde con la

polarità dell'elettrolito. Pertanto se si inverte la polarità il condensatore elettrolitico presenta una bassa resistenza. In questo caso la corrente cresce molto e si possono presentare due conseguenze pericolose: il condensatore può bruciare o può esplodere. Anche per i condensatori elettrolitici non si deve superare la tensione di rottura, pena l'esplosione.

Consideriamo i **diodi**. Essi conducono corrente in una sola direzione. Già abbiamo visto le loro caratteristiche. Hanno limiti alla corrente diretta che possono condurre, alla tensione inversa che possono sostenere. Esistono diodi a bassa corrente ed alta velocità per impieghi in commutazione. Esistono diodi ad alta corrente per raddrizzamento. Vengono scelti consultando i data sheet relativi. Consideriamo che ai capi di un diodo in conduzione si sviluppa una tensione di circa 0.6 Volt. Esiste un modo semplice per determinare se un diodo è buono oppure se è rotto, usando un tester per misurare la loro resistenza diretta e inversa oppure un tester in modalità prova diodi. Per sapere quale sia il catodo e quale sia l'anodo occorre guardare il componente stesso. Nei diodi piccoli di forma cilindrica è segnata una banda nera o bianca che indica il terminale di catodo. Sui diodi più grossi è disegnato il simbolo del diodo.

Veniamo ai **transistori bipolari**. Per l'identificazione dei 3 terminali occorre consultare il data sheet relativo; analogamente per conoscere le caratteristiche del dispositivo. Le modalità di utilizzo sono già state presentate. Ricordiamo che un transistor in conduzione presenta una tensione di circa 0.6 Volt fra base ed emettitore, con la dovuta polarità. Per sapere se un transistor è funzionante oppure rotto basta considerare i due diodi base-emettitore e base-collettore e provarne la loro integrità con un multimetro, verificando infine che ci sia alta resistenza fra emettitore e collettore.

## A.2 I componenti da dimensionare

Il componente principale che consente di controllare tensioni e correnti è il resistore. Per esso vale la legge di Ohm

$$V = R \cdot I$$

che lega direttamente tensione e corrente. L'inserimento di un resistore in un ramo determina la corrente in quel ramo. Quindi è prioritaria la determinazione dei valori delle resistenze dei vari resistori presenti nel circuito. Teniamo presente che è sempre valida la legge di Joule:

$$w = R \cdot I^2 = V \cdot I$$

che stabilisce la potenza dissipata in un resistore o in un componente attivo in cui scorre la corrente  $I$ . I normali componenti elettronici attivi hanno un limite alla potenza che possono dissipare. Pertanto la corrente  $I$  deve essere tenuta piccola, orientativamente sotto il milliampere. Si sceglieranno allora valori delle resistenze principali nell'intervallo  $3K\Omega \div 100K\Omega$ .

Il condensatore in condizioni statiche, cioè in assenza di segnale (in corrente continua), mantiene immagazzinata una certa quantità costante di carica secondo la relazione

$$Q = C \cdot V$$

Non scorre corrente attraverso il condensatore, quindi esso non interviene nella polarizzazione del circuito. Infatti, esiste un legame diretto soltanto fra carica e tensione.

Il legame fra tensione e corrente è invece indiretto attraverso la relazione

$$V = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

cioè la tensione ai capi del condensatore è l'integrale della corrente di carica e scarica nel tempo. La scelta del valore della capacità del condensatore deve perciò essere fatta in base alle condizioni di funzionamento,

cioé quando lo stato di carica del condensatore varia nel tempo, come ad es. nel caso di una costante  $RC$ . In queste condizioni scorre una corrente che va a modificare lo stato di carica e quindi la tensione ai capi del condensatore.

### A.3 Le condizioni di lavoro degli amplificatori

Vediamo ora come usare gli amplificatori integrati. Abbiamo a disposizione il blocco Op-Amp, che abbiamo incontrato al punto 9.4 capitolo 9. Esistono in commercio molte versioni di Op-Amp, con differenti caratteristiche. Per poterli usare occorre riferirsi alle specifiche tecniche (data sheet) pubblicate dalle case costruttrici. Sulle specifiche sono indicate le funzioni dei vari piedini (terminali) del componente e le condizioni operative che il componente può sopportare senza danno.

Innanzitutto occorre applicare all'integrato le tensioni di alimentazione affinché esso possa funzionare. Ovviamente queste tensioni rappresentano il limite invalicabile dal segnale in uscita. Inoltre il circuito ha una limitata capacità di erogare corrente, poiché ha una limitata capacità di erogare potenza elettrica. Di conseguenza non possiamo mettere in uscita resistenze troppo basse. Ancora, dobbiamo consultare le specifiche tecniche per poter usare correttamente l'amplificatore integrato.

Consideriamo ora i due ingressi  $V^+$  e  $V^-$  dell'amplificatore integrato (vedi §9.4). Sulle specifiche tecniche essi sono indicati rispettivamente con "+" o "NI" e con "-" o "I" (NI sta per non-invertente, I sta per invertente). La notazione "+" e "-" non indica che il segnale positivo deve andare al "+" e il segnale negativo deve andare al "-"; indica che il segnale applicato al terminale "-" o "I" è amplificato con inversione della polarità, mentre il segnale applicato al terminale "+" o "NI" è amplificato senza inversione della polarità.

Preliminarmente dobbiamo analizzare la funzione del circuito per decidere se esso opera con uscita lineare (controreazione negativa) oppure con uscita discreta (controreazione positiva), perché diverso è il modo di effettuare la polarizzazione del circuito, quindi di effettuare la scelta dei valori dei componenti. Rileggiamoci qui il punto 8.4 del capitolo 8, relativo ai due modi di funzionamento di un amplificatore. Esaminiamo separatamente i due modi suddetti.

#### A) - Funzionamento lineare

Ricordiamo che il funzionamento lineare prevede che sia stabilito il punto di lavoro statico, su cui si sovrappone il segnale in condizioni dinamiche (teorema della sovrapposizione). Si parla allora di dinamica del segnale attorno al punto di lavoro.

Per **dinamica di tensione** d'uscita si intende la massima escursione della tensione in uscita. Ovviamente la dinamica massima in tensione, che un circuito può accomodare, è limitata entro le tensioni di alimentazione del circuito stesso, in quanto la potenza disponibile è fornita dagli alimentatori.

Per **dinamica di corrente** d'uscita si intende la massima escursione della corrente che il circuito deve erogare e/o assorbire. Questa corrente è funzione del carico che il circuito deve pilotare.

Quando usiamo un amplificatore integrato, dobbiamo leggere sulle specifiche date dal costruttore i limiti di utilizzo del circuito stesso in termini di tensione e corrente che esso può erogare al carico. Questo è il primo vincolo che dobbiamo rispettare. Analogamente, quando usiamo un transistor dobbiamo leggere sulle specifiche date dal costruttore i limiti di tensione, corrente e potenza che esso può sopportare senza essere distrutto.

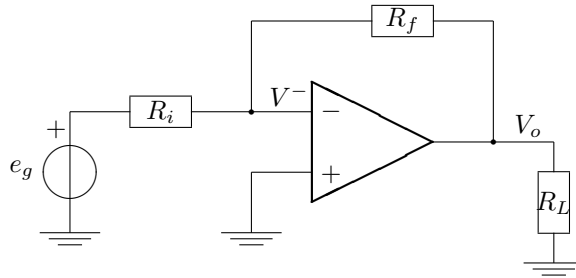
Veniamo alla polarizzazione dei componenti attivi.

Per i transistor abbiamo già esaminato il problema nel capitolo 6 al punto 6.6. Ad esso rimandiamo.

Per gli amplificatori integrati affrontiamo qui il problema. Innanzitutto ricordiamo quanto già visto nel capitolo 9 ai punti 9.1 e 9.4.

Cominciamo con l'amplificatore invertente. Facciamo riferimento alla figura A.1 che segue.





$$G = -\frac{R_f}{R_i}$$

Fig. A.1

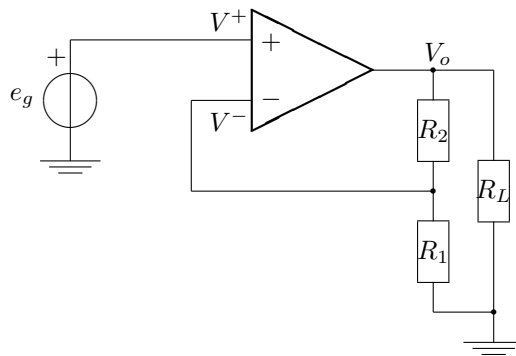
L'ingresso  $V^+$  è a massa:  $V^+ = 0V$ . L'ingresso  $V^-$  è a massa virtuale, quindi a  $0V$ . In assenza di segnale ( $e_g = 0$ ), nel resistore  $R_i$  non passa corrente perché la caduta di tensione ai suoi capi è  $0V$ . Nell'ingresso  $V^-$  dell'amplificatore praticamente non entra corrente. Pertanto l'equazione al nodo  $V^-$  ci dice che nel resistore  $R_f$  non deve passare corrente; quindi anche  $V_o$  deve essere a potenziale nullo:  $V_o = 0V$ . Il punto di lavoro dell'uscita dell'amplificatore risulta fissato a  $0V$ .

In condizioni dinamiche il segnale emesso da  $e_g$  risulterà amplificato in uscita secondo la legge:

$$V_o = -\frac{R_f}{R_i} e_g$$

Quando  $V_o$  assume il valore massimo, la corrente scorre in  $R_f$  e in  $R_L$ . In generale si sceglierà per  $R_f$  un valore grande rispetto a  $R_L$  in modo che una gran parte della corrente, la parte utile, passi in  $R_L$ . Però il parallelo di  $R_f$  e  $R_L$  non deve essere inferiore al minimo valore di resistenza che l'integrato può sostenere, come indicato nelle curve caratteristiche dell'integrato stesso. Facciamo un esempio. Supponiamo che la resistenza minima di caricamento dell'amplificatore per la massima escursione della tensione d'uscita, sia  $10K\Omega$ . Sia  $12K\Omega$  la resistenza  $R_L$ . Il minimo valore che  $R_f$  può assumere è  $60K\Omega$ . Infatti:  $60K\Omega$  in parallelo a  $12K\Omega$  danno una resistenza equivalente di  $10K\Omega$ .

Consideriamo ora l'amplificatore non invertente. Facciamo riferimento alla figura A.2 che segue.



$$G = \frac{R_2 + R_1}{R_1}$$

Fig. A.2

In assenza di segnale ( $e_g = 0$ ) l'ingresso  $V^+$  é a 0V. Anche l'ingresso  $V^-$  dovrà essere a 0V poiché il guadagno dell'amplificatore é elevatissimo: pertanto in  $R_1$  non dovrà passare corrente. Allora non dovrà passare corrente neppure in  $R_2$  e quindi  $V_o$  dovrà essere anch'esso a 0V. Il punto di lavoro dell'uscita dell'amplificatore risulta fissato a 0V.

In condizioni dinamiche il segnale emesso da  $e_g$  risulterà amplificato in uscita secondo la legge:

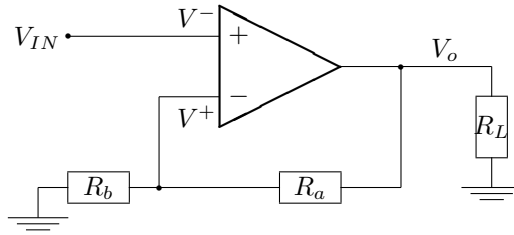
$$V_o = \frac{R_2 + R_1}{R_1} e_g.$$

Quando  $V_o$  assume il valore massimo, la corrente scorre in  $R_L$  e, in parallelo, nella serie di  $R_2$  e  $R_1$ . In genere si sceglieranno  $R_1$  e  $R_2$  di valore elevato in modo che la corrente passi quasi tutta nel carico  $R_L$ . Però il parallelo di  $R_L$  con la somma di  $R_2$  e  $R_1$  non deve essere inferiore al minimo valore di resistenza che l'integrato può sostenere, come indicato nelle curve caratteristiche dell'integrato stesso.

#### B) - Funzionamento discreto (o a scatto)

In questo caso il comportamento dell'amplificatore é totalmente diverso, controllato dalla reazione positiva con inversione del segno del guadagno (§8.4, fig. 8.14d). L'amplificatore opera un confronto fra le tensioni dei due ingressi: quindi opera come comparatore. Sono possibili due soli stati stabili e due soli momenti di transizione fra gli stati.

Facciamo riferimento alla figura A.3 che segue.



$$V_o = A_{\infty}(V^+ - V^-)$$

Fig. A.3

L'uscita  $V_o$  può assumere due soli valori estremi, pari alla saturazione positiva  $V_{o+}$  e alla saturazione negativa  $V_{o-}$ . Corrispondentemente il partitore ( $R_a, R_b$ ) fissa la tensione dell'ingresso  $V^+$  a un valore intermedio positivo  $V_p^+$  o a un valore intermedio negativo  $V_n^+$ .

Supponiamo che il circuito sia nello stato positivo, con  $V_o = V_{o+}$  e  $V^+ = V_p^+$  e con  $V^- < V_p^+$ . Fintantoché vale  $V^- < V_p^+$  lo stato  $V_{o+}$  é stabile. Quando  $V^-$  aumentando raggiunge  $V_p^+$  e inizia a superarlo, si innesca la reazione positiva che fa scattare l'uscita  $V_o$  del circuito da  $V_{o+}$  a  $V_{o-}$ . Come risultato anche  $V^+$  scatta a  $V_n^+$  e ne risulta che  $V^- > V_n^+$ . Fintantoché vale  $V^- > V_n^+$  lo stato  $V_{o-}$  é stabile. Quando  $V^-$  diminuendo raggiunge  $V_n^+$  e inizia a diventare più negativo, si innesca la reazione positiva che fa scattare l'uscita  $V_o$  del circuito da  $V_{o-}$  a  $V_{o+}$ .

Essendo possibili i due soli stati estremi, dovremo assicurarci solamente che in essi sia rispettato il caricamento del circuito, cioè in questi due stati non si deve eccedere la capacità del circuito di erogare corrente. Dovremo soltanto assicurarci che il parallelo di  $R_L$  con  $R_a + R_b$  non sia inferiore al minimo valore di resistenza che l'integrato può sostenere, come indicato nelle curve caratteristiche dell'integrato stesso.